

TD n°1. Corrigé

Exercice A

Première preuve : Par récurrence sur n . On pose $A_n = \prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1$.

On a $(1 + z_{n+1})A_n = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) - (1 + z_{n+1}) = A_{n+1} - z_{n+1}$.

Donc $|A_{n+1}| \leq (1 + |z_{n+1}|)|A_n| + |z_{n+1}| \leq \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |z_k|) - 1 - |z_{n+1}| + |z_{n+1}| = \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |z_k|) - 1$.

Seconde preuve : $\prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1$ est une somme de termes de la forme $\prod_{i \in I} z_i$.

Et $\prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$ est la même somme, mais en remplaçant $\prod_{i \in I} z_i$ par $\prod_{i \in I} |z_i|$.

Or, on a $|\prod_{i \in I} z_i| \leq \prod_{i \in I} |z_i|$. Donc par inégalité triangulaire, $|\prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$.

Exercice B

1) a) On a $f(2^{-n}x) = f(x)$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par continuité $f(0) = f(x)$.

Donc les solutions vérifiant (E_1) sont les fonctions constantes.

b) Si f de classe C^1 vérifie (E_2) , alors $2f'(2x) = 2f'(x)$, donc f' est constante. Comme $f(0) = 0$, alors $f(x) = ax$.

2) On a $f(2^{-n}x) = 2^{-n}f(x)$. Comme $f(0) = 0$, alors $f'(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(2^{-n}x)}{2^{-n}x} = \frac{f(x)}{x}$.

Donc $f(x) = xf'(0)$, donc est de la forme ax . Réciproque immédiate.

Exercice C

Première preuve (conseillée) : On considère $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{f(x)}{x(1-x)}$.

g se prolonge par continuité sur $[0, 1]$ par $g(0) = f'(0)$ et $g(1) = -f'(1)$.

Par le th des bornes atteintes, g est bornée sur $[0, 1]$, d'où le résultat.

Seconde preuve : Posons $K = \sup_{[0,1]} |f'|$.

Par l'inégalité des acc finis, on a $\forall x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|f(x)| \leq Kx \leq 2Kx(1-x)$.

De même, on a $\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|f(x)| \leq K(1-x) \leq 2Kx(1-x)$. Donc $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq 2Kx(1-x)$.

Exercice D

1) Supposons par l'absurde f non nulle. Quitte à considérer $-f$, on peut supposer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) > 0$. Par continuité, il existe alors un intervalle $[a, b] \subset [0, 1]$ d'intérieur non vide (c'est-à-dire $a < b$) tel que $\forall x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.

Il existe une fonction g de classe C^1 strictement positive sur $[a, b]$ et nulle en dehors de $[a, b]$. On peut prendre $g(x) = (x-a)^2(b-x)^2$ si $x \in [a, b]$, et 0 sinon.

On a alors $\int_0^1 f(t)g(t) dt = \int_a^b f(t)g(t) dt > 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

2) Par IPP, on a $\forall g \in E$, $\int_0^1 f(t)g'(t) dt = -\int_0^1 f'(t)g(t) dt$, donc $\forall g \in E$, $\int_0^1 (f(t) - f'(t))g(t) dt = 0$.

Par 1), $f = f'$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, 1]$, $f(x) = \lambda \exp(x)$.

Exercice E

1) On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\exp$ sur $[0, 1]$.

On a donc $0 < e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,1]} \exp^{(n+1)} = \frac{e}{(n+1)!}$.

(Variante : $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right) \leq \frac{e}{(n+1)!}$).

Or, $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{A_n}{n!}$ où $A_n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!}$ est un entier naturel.

On a donc bien $\frac{A_n}{n!} < e \leq \frac{A_n}{n!} + \frac{e}{(n+1)!}$, c'est-à-dire $A_n < n!e \leq A_n + \frac{e}{n+1}$.

2) Supposons par l'absurde $e = \frac{p}{q}$. Pour $n \geq q$, on a donc $n!e \in \mathbb{N}$.

Et pour n assez grand, on a en plus $\frac{e}{n+1} < 1$. Par 1), $A_n < n!e < A_n + 1$, ce qui contredit $n!e$ entier.