

Exercice A. (*début sujet Centrale 2024*) Soient des nombres complexes $z_1, \dots, z_n$.

Montrer que $|\prod_{k=1}^n (1 + z_k) - 1| \leq \prod_{k=1}^n (1 + |z_k|) - 1$.

Exercice B. Exemple d'équation fonctionnelle

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on considère $(E_1) : f(2x) = f(x)$ et $(E_2) : f(2x) = 2f(x)$.

1) a) Montrer que les fonctions continues en 0 vérifiant (E_1) sont les fonctions constantes.

b) En déduire que les fonctions de classe C^1 vérifiant (E_2) sont les $x \mapsto ax$.

2) Montrer que les fonctions dérivables en 0 vérifiant (E_2) sont les $x \mapsto ax$.

Exercice C. Inégalités locales et globales

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq Mx(1 - x)$.

Exercice D. Propriété d'orthogonalité

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions g de classe C^1 sur $[0, 1]$ vérifiant $g(0) = g(1) = 0$.

1) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\forall g \in E, \int_0^1 f(t)g(t) dt = 0$.

Montrer que f est identiquement nulle.

2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . On suppose que $\forall g \in E, \int_0^1 f(t)(g'(t) + g(t)) dt = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \lambda \exp(x)$.

Exercice E. Exemple d'irrationalité

1) On considère $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier A_n tel que

$$A_n < n!e \leq A_n + \frac{e}{n+1}$$

Remarque : On rappelle aussi l'inégalité de Taylor-Lagrange : $\left| f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{(0,x]} |f^{(n+1)}|$.

2) En déduire que e est irrationnel.

Exercice supplémentaire (★) . Densité de $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ sur le cercle trigonométrique

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur θ pour que $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ soit périodique.

2) On suppose désormais que $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ est injective.

3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n < m$ tels que $\text{angle}(e^{in\theta}, e^{im\theta}) \leq \varepsilon$.

4) On pose $p = m - n$. On pose $\omega = e^{ip\theta}$. Par 3), on a donc $\text{angle}(1, \omega) \leq \varepsilon$.

Montrer que pour tout $z = e^{i\varphi} \in U$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{angle}(z, \omega^k) \leq \varepsilon$.

A fortiori, on a donc $|z - \omega^k| \leq \varepsilon$. Ainsi $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ est dense sur le cercle unité U .