TD n°1. Sommes, produits et polynômes

Exercice A. Polynôme translaté et polynôme miroir

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients complexes dont les racines sont $z_1, z_2, ..., z_n$.

1) Donner sans justification un polynôme de degré n (exprimé en fonction de P) dont les racines sont les $z_k - \alpha$.

2) On suppose que les z_k sont tous non nuls, c'est-à-dire $a_0 \neq 0$.

a) Factoriser $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$. *Indication* : Noter que $Q(X) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$.

b) En déduire que la somme $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}$ vaut $-\frac{a_1}{a_0}$.

3) On suppose que P est réel et que toutes ses racines complexes $z_1, z_2, ..., z_n$ sont de module 1.

Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $a_{n-k} = \varepsilon\, a_k$.

Exercice B

On considère $f(x) = \exp(-x^2)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)\exp(-x^2)$.

1) Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.

2) En utilisant $f'(x) = -2xf(x)$, trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

3) Montrer que P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice C

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer sans récurrence qu'il existe un unique polynôme P_n tel que, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$P_n(\operatorname{cotan}^2 t) = \frac{\sin((2n+1)t)}{(\sin t)^{2n+1}}$$

Indication : On trouvera finalement : $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}$.

2) Montrer que les racines de P_n sont les $x_k = \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, avec $1 \leq k \leq n$.

3) Montrer que $x_1 + ... + x_n = \frac{1}{3}n(2n-1)$.

4) a) Montrer que $\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $(\operatorname{cotan} t)^2 \leq \frac{1}{t^2} \leq 1 + (\operatorname{cotan} t)^2$.

b) En déduire que $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$,c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6}$, où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.