TD n°1. Polynômes. Corrigé

Exercice A

1) Le polynôme $Q(X) = P(X+\alpha)$ convient.

En effet, si $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$, alors $P(X+\alpha) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(X - (z_k - \alpha))$.

2) a) Les z_k sont tous non nuls ssi le produit $z_1 z_2 ... z_n$ n'est pas nul, donc ssi $a_0 \neq 0$.

Variante : Les racines ne sont pas nulles ssi 0 n'est pas racine, c'est-à-dire ssi $P(0) \neq 0$, ce qui équivaut à $a_0 \neq 0$.

b) On utilise $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X}) = \lambda X^n \prod_{k=1}^{n}(\frac{1}{X} - z_k) = \lambda \prod_{k=1}^{n}(1 - z_k X)$.

c) On a $Q = a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + ...$, donc $S = -\dfrac{a_1}{a_0}$.

3) Comme z_k est de module 1, alors $\dfrac{1}{z_k} = \overline{z_k}$.

Comme P est réel, les z_k sont deux à deux conjugués, avec multiplicité.

Donc P et Q, qui ont les mêmes racines, sont proportionnels : il existe $\lambda \neq 0$ tel que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_{n-k} = \lambda\ a_k$.

Remarque : En fait, $\lambda = \dfrac{a_0}{a_n} = (-1)^n z_1 z_2 ... z_n = (-1)^{n+r}$, où r est l'ordre de -1 comme racine de P.

Exercice B

1) On a $f^{(n+1)}(x) = (P_n'(x) - 2xP_n(x))\exp(-x^2)$, donc $P_{n+1} = P_n'(x) - 2xP_n(x)$.

2) On dérive n fois la relation $f'(x) = -2xf(x)$.

Avec Leibniz, $f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$, donc $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x)$.

3) On a $\lim_{+\infty} f^{(n)} = \lim_{-\infty} f^{(n)} = 0$.

Par Rolle, le nombre de zéros de $f^{(n+1)}$ est donc strictement supérieur à celui de $f^{(n)}$.

Par récurrence, $f^{(n)}$, donc P_n, admet au moins n racines réelles.

Or, par 1), $\deg P_n \leq n$ car $\deg P_{n+1} \leq 1 + \deg P_n$ et $\deg P_0 = 0$. Donc P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Exercice C

1) (*existence*) On applique la formule de Moivre pour calculer $\sin((2n+1)t)$. On a :

$$\sin((2n+1)t) = \mathrm{Im}(\cos t + i \sin t)^{2n+1}) = \mathrm{Im}\left(\sum_{p=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{p}(i)^p (\sin t)^p (\cos t)^{2n+1-p}\right)$$

$$= \sum_{p \text{ impair } \leq 2n+1} \binom{2n+1}{p}(i)^{(p-1)}(\sin t)^p (\cos t)^{2n+1-p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k (\sin t)^{2k+1}(\cos t)^{2(n-k)}.$$

En divisant par $(\sin t)^{2n+1}$, non nul si $0 < t < \frac{\pi}{2}$, on en déduit que $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k X^{n-k}$ convient.

(*unicité*) Le polynôme P est unique. En effet, supposons que Q convienne aussi. On a $P(\mathrm{cotan}^2\, t) = Q(\mathrm{cotan}^2\, t)$ pour tout $0 < t < \frac{\pi}{2}$, donc $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Ainsi, $(P - Q)$ admet une infinité de racines, donc $P = Q$.

2) On a $P_n(x_k) = 0$, car $\sin(k\pi) = 0$.

Comme cotan est strictement décroissante et positive sur $]0, \pi[$, les $x_k = \mathrm{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1})$, avec $1 \leq k \leq n$, sont deux à deux distincts, donc ce sont les seules racines de P_n, puisque P_n est de degré n.

3) La somme des racines est l'opposé du coefficient en X^{n-1} divisé par le coefficient dominant. Donc

$$x_1 + ... + x_n = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)(2n-1)}{6(2n+1)} = \frac{1}{3}n(2n-1)$$

4) a) Comme cotan est positive sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $1 + \mathrm{cotan}^2 = \frac{1}{\sin^2}$, il s'agit de prouver que $\mathrm{cotan}\, t \leq \dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{\sin t}$.

Autrement dit, il suffit de prouver que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on a : $\sin t \leq t \leq \tan t$.

On étudie les fonctions $f(t) = t - \sin t$ et $g(t) = \tan t - t$ qui sont croissantes (les dérivées sont positives) et nulles en 0, donc positives sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. D'où le résultat.

b) On écrit l'inégalité du a) pour $t = \frac{k\pi}{2n+1}$, et on somme pour k variant de 1 à n. On obtient avec 3) :

$\frac{1}{3}n(2n-1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2} \leq n + \frac{1}{3}n(2n-1)$. On divise par $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2 k^2}$, ce qui donne un encadrement de S_n.

On fait tendre vers $+\infty$, et par pincement, on obtient $\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{6}\pi^2$.