Equations linéaires

1) Nature de l'ensemble des solutions

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. L'équation $\boxed{(S) : u(x) = b}$ d'inconnue $x \in E$ admet une solution ssi $b \in \operatorname{Im} u$.

Dans ce cas, si x_0 est une solution particulière, alors l'ensemble des solutions est $x_0 + \operatorname{Ker} u$.

En effet, on a : $u(x) = b$ ssi $u(x) = u(x_0)$, donc ssi $u(x - x_0) = 0$, c'est-à-dire ssi $x - x_0 \in \operatorname{Ker} u$.

Remarque : $x_0 + \operatorname{Ker} u = \{x_0 + z,\, z \in \operatorname{Ker} u\}$ est un sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} u$, obtenu en translatant le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} u$. En particulier, si u est injectif, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$ et $x_0 + \operatorname{Ker} u$ est le singleton $\{x_0\}$.

En conclusion, $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (S) \text{ est soit vide soit un sous-espace affine de direction } \operatorname{Ker} u}$.

Remarque : (S) admet au moins une solution pour tout $b \in F$ ssi $\operatorname{Im} u = F$, c'est-à-dire u surjectif.

(S) admet au plus une solution ssi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, c'est-à-dire u injectif.

Lorsque u est bijective, l'unique solution de (S) est $x = u^{-1}(b)$.

2) Principe de superposition

Considérons $(S) : u(x) = b$, avec $b = \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Si pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, y_i vérifie $u(y_i) = b_i$, alors $x = \sum_{i=1}^{n} y_i$ est solution de (S).

Exemple : Pour déterminer une solution de $(E) : y'' + y' + y = 1 + e^t$, on distingue ... $= 1$ et ... $= e^t$.

Systèmes linéaires

1) Systèmes linéaires

a) *Définition et interprétations.*

Un système de n équations et à p inconnues sur K est un système de la forme $(S) : \forall i \in \{1, ..., n\},\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j = b_i$, où les a_{ij} et les b_i sont donnés, et les x_j sont les inconnues.

Interprétations :

- matricielle : $(S) : AX = B$, avec $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, $B = (b_i)_{1 \le i \le n} \in K^n$ et $X = (x_j)_{1 \le j \le p} \in K^p$.
- application linéaire : $(S) : u(x) = b$, où $u : K^p \to K^n \quad X \longmapsto AX$ est l'application linéaire associé à A.
- famille de vecteurs : $(S) : \sum_{j=1}^{p} x_j A_j = B$, où les A_j sont les vecteurs colonnes de A.
- formes linéaires : $(S) : \forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ \varphi_i(x) = b_i$, où $\varphi_i : K^p \to K \quad x \longmapsto \sum_{j=1}^{p} a_{ij} x_j$.

Remarque : Dans le cas d'un espace euclidien, $\varphi_i(x) = (x \mid a_i)$, où a_i est le i-ième vecteur ligne de A.

Rang du système : Le rang de (S) est $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(A_1, A_2, ..., A_p) = \operatorname{rg}(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n) = \operatorname{rg}(a_1, ..., a_n)$.

b) *Nature de l'ensemble des solutions, système compatible.*

On note $\mathcal{S} = \{X \in K^p \mid AX = B\}$ l'ensemble des solutions du système.

Le système homogène associé à (S) est le système $(H) : AX = 0$.

$\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{S}_H \text{ des solutions de } (H) \text{ est } \operatorname{Ker} u, \text{ qui est sev de } K^p \text{ de dimension } p - r.}$

Intuitivement, il y a p "degrés de liberté" et r équations indépendantes.

Remarque : Dans le cas d'un espace euclidien, $\mathcal{S}_H = F^\perp$, orthogonal de $F = \mathrm{Vect}(a_1, ..., a_n)$ dans K^p.

Le système (S) est compatible ssi $\mathcal{S}$ n'est pas vide, c'est-à-dire ssi $b \in \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(A_1, A_2, ..., A_p)$.

Dans ce cas, si on note x_0 une solution particulière de (S), alors $\mathcal{S}$ est le sous-espace affine $x_0 + \mathrm{Ker}\, u$.

Remarques :

- Le système admet au plus une solution lorsque $\mathcal{S}_H = \{0\}$, c'est-à-dire lorsque $p = r$.

- Lorsque $r = n$, c'est-à-dire que les formes φ_i sont indépendantes, le système admet au moins une solution

En effet, l'application $u : K^p \to K^n \quad X \longmapsto AX$ est surjective.

c) *Systèmes de Cramer.*

Définition : Ici $n = p$, et $A \in \mathcal{M}_n(K)$. on dit que (S) est de Cramer ssi A est inversible (c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, A = n$).

Dans ce cas, l'équation $AX = B$ admet $X = A^{-1}B$ comme unique solution. En particulier, $AX = 0$ ssi $X = 0$.

d) *Résolution d'un système de Cramer triangulaire.*

Soit $T = (t_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ une matrice triangulaire supérieure inversible : $t_{ij} = 0$ pour $i > j$, et $t_{ii} \neq 0$.

Alors le système $(S) : TX = B$ s'écrit : $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $x_i = \dfrac{1}{t_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} t_{ij}x_j\right)$.

Ainsi, les x_j s'obtiennent par récurrence forte descendante.

Remarque : Si la matrice est triangulaire inférieure, les x_j s'obtiennent par récurrence forte.

Remarque : On résout donc informatiquement un système de Cramer triangulaire en $O(n^2)$ opérations élémentaires.

2) Résolution par la méthode du pivot de Gauss

L'idée fondamentale est de se ramener à un système échelonné (= système angulaire supérieur).

a) *Mise sous forme angulaire.*

La méthode du pivot consiste à éliminer successivement les variables à l'aide d'opérations sur les équations (qui transforment le système en systèmes équivalents). Ainsi, on ne garde la première variable uniquement dans la première équation (quitte à modifier l'ordre des équations), puis on élémine de même dans les équations restantes la première variable restante, et on itère le procédé jusqu'à obtention d'un système angulaire supérieur.

Exemple : $(S) : \begin{cases} x+y+z+t = a \\ x+y+2z+3t = b \\ 2x+2y+3z+4t = c \end{cases}$, $\begin{cases} x+y+z+t = a \\ z+2t = b-a \\ z+2t = c-2a \end{cases}$ $\begin{cases} x+y+z+t = a \\ z+2t = b-a \\ 0 = c-a-b \end{cases}$.

b) *Résolution de $(S) : AX = B$, où A matrice angulaire supérieure.*

Exemple : $\boxed{(S) : \begin{cases} x+y+z+t = \alpha \\ z+2t = \beta \\ 0 = \gamma \end{cases}}$ Les pivots sont les termes non nuls de $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. .

Les inconnues x et z correspondant aux colonnes des pivots sont appelées inconnues principales.

La condition de compatibilité est $\gamma = 0$. Si $\gamma \neq 0$, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$.

Si $\gamma = 0$, (S) s'écrit $\begin{cases} x+z = \alpha - y - t \\ z = \beta - 2t \end{cases}$ qui un système de Cramer triangulaire en (x, z).

D'où $(S) : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha-\beta-y+t \\ z & = & \beta-2t \end{array}\right.$ qui s'écrit aussi $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha-\beta-y+t \\ y & = & y \\ z & = & \beta-2t \\ t & = & t \end{array}\right.$

En pratique, on conseille d'ajouter les deux équations $y = y$ et $z = z$, de sorte à distinguer les inconnues x, y, z, t qui sont dans le premier membre et $\boxed{\text{les paramètres } y \text{ et } t}$ qui interviennent ans le second membre.

Ainsi, à tout $(y, t) \in K^2$ correspond une unique solution de (S) : on obtient un paramétrage de $\mathcal{S}$.

Les solutions sont les $\begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $S = \begin{pmatrix} \alpha-\beta \\ 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Dans cet exemple, les inconnues x et z sont appelées inconnues principales.

Autrement dit, $\boxed{\text{on obtient un paramétrage de } \mathcal{S} \text{ par les } p-r \text{ inconnues non principales}}$.

L'ensemble des solutions est obtenu sous la forme $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_H$, avec ici $\dim \mathcal{S}_H = 4 - 2 = 2$.

c) *Mise sous forme angulaire supérieure.*

Principe : Par des opérations élémentaires sur les lignes (transvections, permutations), on peut transformer toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ en une matrice angulaire supérieure QA, où $Q \in GL_n(K)$.

Considérons un système linéaire $(S) : AX = B$. En opérant sur les équations (ligne de A + second membre) du système, on obtient le système angulaire supérieur $(S') : QAX = QB$.

Les systèmes (S) et (S') sont équivalents (c'est-à-dire ont les mêmes solutions), car Q est inversible.

Remarque : Le nombre d'opérations nécessaires (pour $r \geq 1$) est en $O(npr)$.

d) *Exemples.*

Exemple classique : $\boxed{(S) : \left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 1 \\ x+2y+3z & = & 2 \end{array}\right.}$

Il s'agit de l'intersection de deux plans non parallèles dans K^3. Ici, $r = n = 2$, donc (S) est compatible.

Donc l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de dimension $p - r = 1$, c'est-à-dire une droite affine.

$$(S) : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y+2z & = & 2 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1-z \\ y & = & 2-2z \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 1-z \\ y & = & 2-2z \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+z \\ y & = & 2-2z \end{array}\right. \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -1+z \\ y & = & 2-2z \\ z & = & 0+z \end{array}\right.$$

Donc l'ensemble des solutions est la droite $D = (-1, 2, 0) + K(1, -2, 1)$.

Exemple : $(H) : x_1 + x_2 + ... + x_n = \alpha$.

Il s'agit de l'équation d'un hyperplan $\mathcal{H}$ de K^n. On écrit $(S) : x_1 = \alpha - x_2 - ... - x_n$.

Donc $\mathcal{H} = (\alpha, 0, 0, ..., 0) + \mathrm{Vect}(e_i - e_1)_{2 \leq i \leq n}$.

e) *Calcul pratique de l'inversion d'une matrice.*

Pour inverser une matrice $A \in GL_n(K)$, on résout le système $(S) : AX = Y$, pour tout $y = (y_1, ..., y_n) \in K^n$. La matrice A est inversible ssi on obtient sous forme angulaire un système de Cramer triangulaire supérieure (avec n pivots).

Exemple : Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(K)$.

$$(S) : AX = X' : \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & x' \\ x+y+z & = & y' \\ 2x+3y+7z & = & z' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+3z & = & x' \\ -y-2z & = & y'-x' \\ -y+z & = & z'-2x' \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & x' \\ -y-2z & = & y'-x' \\ 3z & = & z'-x'-y' \end{array} \right.$$

Donc A est inversible, et $(S) : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3}(-4x'+5y'+z') \\ y & = & \frac{1}{3}(5x'-y'+2z') \\ z & = & \frac{1}{3}(-x'-y'+z') \end{array} \right.$, donc $A^{-1} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque importante : Le calcul de l'inverse par cette méthode s'effectue donc en $O(n^3)$ opérations.

Remarque : Cette résolution revient à la résolution simultanée des systèmes $(S) : AX = E_j$, avec $1 \leq j \leq n$:
En effet, la j-ième colonne de A^{-1} est la solution du système $(S) : AX = E_j$.

3) Application des déterminants aux systèmes de Cramer

Prop : Considérons un système de Cramer $(S) : AX = B$, c'est-à-dire $(S) : \sum_{j=1}^{n} x_j A_j = B$, avec $A \in GL_n(K)$.

Alors pour tout $j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\boxed{x_j = \dfrac{\det(A_1, ..., A_{j-1}, B, A_{j+1}, ..., A_n)}{\det(A)}}$.

Preuve : Par linéarité, $\det(A_1, ..., A_{j-1}, B, A_{j+1}, ..., A_n) = \det(A_1, ..., A_{j-1}, x_j A_j, A_{j+1}, ..., A_n) = x_j \det A$.

Remarque : A l'exception du cas $n = 2$, il s'agit d'un résultat plus théorique que pratique.

4) Pratique de résolution des systèmes de Cramer d'ordre 2

Considérons $(S) : \left\{ \begin{array}{l} ax+by = \alpha \\ cx+dy = \beta \end{array} \right.$, avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(K)$, c'est-à-dire $\det A = ad - bc \neq 0$.

PREMIÈRE MÉTHODE :

On obtient x en éliminant y, c'est-à-dire en soustrayant la première équation multipliée par d et la seconde multipliée par b. On obtient de même y en considérant une combinaison linéaire judicieuse des deux équations.

On obtient donc $\left\{ \begin{array}{l} (ad-bc)x = d\alpha - b\beta \\ (ad-bc)y = a\beta - c\alpha \end{array} \right.$ (cette méthode suppose connue en toute rigueur l'unicité de la solution)

DEUXIÈME MÉTHODE :

On inverse A. Le système (S) s'écrit $AX = B$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Donc $X = A^{-1}B$. Comme $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Remarque : Cette méthode est particulièrement conseillée lorsque $A \in O_2(\mathbb{R})$, puisque $A^{-1} = {}^tA$.

Exemple : $\left\{ \begin{array}{l} (\cos\theta)x - (\sin\theta)y = \alpha \\ (\sin\theta)x + (\cos\theta)y = \beta \end{array} \right.$, donc $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

TROISIÈME MÉTHODE :

On utilise les déterminants (cf paragraphe 3)). On obtient $x = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{vmatrix} \alpha & c \\ \beta & d \end{vmatrix}$ et $y = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix}$.