Etude des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition de la suite, intérêt des intervalles stables par f.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Def et prop (Important) : $\boxed{\text{On dit que } J \subset I \text{ est stable par } f \text{ ssi } f(J) \subset J}$ (c'est-à-dire $\forall x \in J\ \ f(x) \in J$).

Dans ce cas, pour tout $u_0 \in J$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in J$.

En pratique, pour prouver que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, on détermine un intervalle J stable par f et contenant u_0.

Remarque : Graphiquement, $[a, b]$ est stable par f ssi le graphe de f sur $[a, b]$ est inclus dans le carré $[a, b]^2$.

De même, $[a, b]$ est stable par f ssi le graphe de f sur $[a, +\infty[$est inclus dans le "carré infini" $[a, +\infty[$.

Monotonie de la suite (via l'étude du signe de $f - \mathrm{Id}$).

Posons $\varphi = f - Id$. On a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = \varphi(u_n)$.

Prop : $\boxed{\text{Soit } J \text{ un intervalle où } \varphi \geq 0 \text{ (c'est-à-dire } \forall x \in J\ \ f(x) \geq x\text{). Tant que } u_n \in J\text{, on a } u_{n+1} \geq u_n}$.

$\boxed{\text{Si de plus, } J \text{ est stable par } f\text{, alors pour tout } u_0 \in J,\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante (et on a } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in J\text{)}}$.

Propriété analogue dans le cas où $\varphi \leq 0$ sur J.

$\boxed{\text{En pratique, on cherche des intervalles } J \text{ qui sont stables par } f \text{ et où } f - \mathrm{Id} \text{ garde un signe constant}}$.

Limites éventuelles.

$\boxed{\text{Si } f : I \to \mathbb{R} \text{ est continue et si } \lim_{n\to+\infty} u_n = l \in I\text{, alors } f(l) = l}$ (cf composition des limites).

Exemples classiques

- *Prop* : On suppose $[a, b]$ stable par f, avec f continue, a et b points fixes de f , et $\forall x \in]a, b[,\ f(x) < x$. Alors pour tout $u_0 \in [a, b\,[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers a.

Preuve : Comme $[a, b[$ est stable et que $u_0 \in [a, b\,[$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [a, b[$.

Comme $\forall x \in [a, b[,\ f(x) \leq x$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Décroissante et minorée par a, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Posons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq u_n \leq u_0$. Par passage à la limite des inégalités larges, on a donc : $a \leq l \leq u_0$.

Par continuité de f en l, on a $f(l) = l$. Comme $f(l) = l$ et $l \in [a, b]$, alors $l = a$.

- *Prop* : On suppose $[a, +\infty[$ stable par f, avec f continue, a point fixe de f , et $\forall x \in]a, +\infty[,\ f(x) > x$. Alors pour tout $u_0 \in]a, +\infty[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $+\infty$.

Preuve : Comme $]a, +\infty[$ est stable et que $u_0 \in]a, +\infty[$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in]a, +\infty[$.

Comme $\forall x \in]a, +\infty[,\ f(x) \leq x$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Supposons par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Posons $l = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

Par passage à la limite des inégalités larges, on a : $a < u_0 \leq l$.

Par continuité de f en l, on a $f(l) = l$, ce qui contredit $l > a$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$.

Utilisation de la monotonie de f

Prop : $\boxed{\text{Si } f \text{ est croissante, } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone}}$. (On détermine alors le sens de variation en comparant u_0 et u_1).

Preuve : Si $u_0 \leq u_1$, alors $f(u_0) \leq f(u_1)$, c'est-à-dire $u_1 \leq u_2$, et en itérant, on obtient $u_n \leq u_{n+1}$.

Prop : $\boxed{\text{Si } f \text{ est décroissante, } f \circ f \text{ croissante et les suites } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont monotones}}$, et les sens de variations sont opposés (c'est-à-dire que l'une est croissante et l'autre décroissante).

Preuve : La fonction $g = f \circ f$ est croissante. On a $u_{k+2} = g(u_k)$. On peut donc appliquer la propriété précédente aux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple : Considérons $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

La fonction $f : [0, 1] \to [0, 1]\ x \longmapsto 1 - x^2$ est décroissante et admet un unique point fixe λ.

On vérifie que si $u_0 \in [0, \lambda[$, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0 et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers 1.

Une preuve consiste à étudier $g = f \circ f$ croissante, et on a $g(x) - x = x(1 - x)(x - f(x))$.

Convergence exponentielle

Pour prouver la convergence vers $l = f(l)$, il est souvent utile d'évaluer $u_{n+1} - l = f(u_n) - f(l)$ en fonction de $u_n - l$.

Prop : On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que $\forall x \in I,\ |\,f(x) - l| \leq k\,|\,x - l|$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et $\forall n \in \mathbb{N},\ |\,u_n - l| \leq k^n\,|u_0 - l|$. On dit dans ce cas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge exponentiellement vers l.

Remarque : Tel est le cas si f est contractante (lipschitzienne de rapport $k < 1$), en particulier si $\sup |f'| < 1$.

Exercice

a) Etudier, selon la valeur de u_0, la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n \exp(-u_n)$.

b) On suppose $u_0 > 0$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right) = 1$. En déduire $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Solution

a) On représente la fonction $f : x \longmapsto xe^{-x}$. L'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par f, et $f \leq \mathrm{Id}$ sur cet intervalle.

- Supposons $u_0 \geq 0$. Comme $[0, +\infty[$ est stable par f, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

Comme $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq x$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Minorée, elle converge.

Posons $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Par passage à la limité des inégalités larges, $L \geq 0$.

Par continuité de f en L, on a $f(L) = L$, donc $L = 0$ (seul point fixe de f). Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

- Supposons $u_0 < 0$. Comme $]-\infty, 0[$ est stable par f, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$.

Comme $\forall x < 0$, $f(x) < x$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. Si elle ne tendait pas vers $-\infty$, elle convergerait vers L (cf th de la limite monotone), et on aurait $L \leq u_0$ et $f(L) = L$, ce qui est absurde. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

b) On a $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{f(u_n)} - \dfrac{1}{u_n}$. Or, $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x} \to 1$ lorsque $x \to 0^+$. Or, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0^+$.

Par composition des limites, $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right) = 1$. Posons $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Ainsi, on a $\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1} - v_n) = 1$.

Par Cesàro, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = 1$, donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{v_n - v_0}{n} = 1$, donc $v_n \sim n$, d'où $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.