Prolongements et raccordements

1) Théorème du prolongement C^1 (dit théorème du taupin sérieux)

a) *Th* : On suppose $\begin{cases} f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ est continue sur } [a,b] \text{ et de classe } C^1 \text{ sur }]a,b] \\ \text{il existe } L = \lim_{x\to a, x>a} f'(x) \end{cases}$

Alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$, et en particulier, $f'(a) = L$.

Preuve : On a $f'(a+h) = L + \mathfrak{o}(1)$, donc par intégration $f(a+h) = f(a) + hL + \mathfrak{o}(h)$.

Remarque culturelle : En fait, le "véritable" théorème (HP) énonce que si f est C^1 sur $]a,b]$ et s'il existe $L = \lim_{x\to a, x>a} f'(x)$, alors $f(x) = f(b) - \int_x^b f'(t)\,dt$ converge lorsque x tend vers a^+, et le prolongement de f par continuité ansi défini est de classe C^1 sur $[a,b]$, et en particulier, $f'(a) = L$.

En effet, l'intégrale $\int_a^b |f'(t)|\,dt$ existe, donc l'intégrale $\int_x^b f'(t)\,dt$ converge (absolument) lorsque x tend vers a^+.

Extension au cas C^∞ : On suppose $\begin{cases} f :]a,b] \to \mathbb{R} \text{ de classe } C^\infty \text{ sur }]a,b] \\ \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } \lambda_n = \lim_{x\to a, x>a} f^{(n)}(x) \end{cases}$

Alors f se prolonge sur $[a,b]$ en une fonction de classe C^∞, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = \lambda_n$.

Exemple : (♣♣) Fonctions absolument monotones. Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors f admet un prolongement en a de classe C^∞.

En effet, par le théorème de la limite monotone, $f^{(n)}$ est positive et croissante, donc admet une limite en a^+.

b) *Exemple à connaître. Prop* : On considère la fonction $f : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Alors f est de classe C^∞ et en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$.

Preuve : Comme composées fonctions de classe C^∞, f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.
On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$, où P_n est un polynôme.

En effet, on définit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0(x) = 1$ et $P_{n+1}(x) = P_n(x) - 2nxP_n(x) + x^2 P_n'(x)$.

Par comparaison entre puissances et exponentielles, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0, x>0} f^{(n)}(x) = 0$.

Donc la restriction de f à $[0, +\infty[$ est de classe C^∞ et les dérivées à droite successives de f en 0 sont nulles.

Comme f est identiquement nulle sur $]-\infty, 0]$, alors les dérivées à gauche et à droite en 0 sont égales.

Donc f est de classe C^∞.

2) Exemples de prolongement

a) *Prop* : On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

Alors $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f'(0) \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est de classe C^∞,et $\forall n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n}$

Remarque : L'existence d'un $DL_n(0)$ de g est immédiate, mais ne ppermet pas de prouver la propriété

En effet, on a $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(0) + ... + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} f^{(n+1)}(0) + \mathfrak{o}(x^{n+1})$.

Donc $g(x) = f'(0) + \frac{1}{2}xf''(0) + ... + \frac{1}{(n+1)!}x^n f^{(n+1)}(0) + \mathfrak{o}(x^n)$.

Si on admet que g est de classe C^∞, on obtient donc $\frac{1}{n!}g^{(n)}(0) = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)$, c'est-à-dire $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(0)$.

Preuve : Pour tout $x \neq 0$, on a $\boxed{g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\int_0^x f'(u)\,du}{x} = \int_0^1 f'(\theta x)\,d\theta, \text{ avec } t = \theta x}$

La formule reste vraie pour $x = 0$. Ainsi, pour tout x, on a $g(x) = \int_0^1 f'(\theta x)\,d\theta$.

Par les théorèmes sur les intégrales dépendant d'un paramètre, g est de classe C^∞, et

$$g^{(n)}(x) = \int_0^1 \theta^n\ f^{(n+1)}(\theta x)\ d\theta.$$

En particulier, on retrouve $g^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0)\ \int_0^1 \theta^n\ d\theta = \dfrac{1}{n+1}\ f^{(n+1)}(0)$.

b) *Important* : Dans le cas où f admet un DSE, la propriété est immédiate :

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^n$.

$$\boxed{\text{Par exemple, } g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}}$$

c) *Complément* : Si f est de classe C^∞ et admet 0 comme zéro d'ordre p ($f(0) = f'(0) = ... = f^{(p-1)}(0) = 0$), alors

$$\frac{f(x)}{x^p} = \frac{1}{x^p}\int_0^x \frac{(x-t)^p}{p!}\ f^{(p+1)}(t)\ dt = \int_0^1 \frac{(1-\theta)^p}{p!}\ f^{(p+1)}(\theta x)\ d\theta, \text{ avec } t = \theta x$$

Donc $g : x \longmapsto g(x) = \dfrac{f(x)}{x^p}$ si $x \neq 0$ et $\dfrac{f^{(P+1)}(0)}{(p+1)!}$ si $x = 0$, est de classe C^∞.

3) Raccordements C^p et C^∞

a) *Prop* : La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ \ x \longmapsto \begin{cases} (x-a)^2(b-x)^2 \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Preuve : g est continue sur $\mathbb{R}$, et ses restrictions à $[a,b]$, $[b,+\infty[$ et $]-\infty,a]$ sont de classe C^∞.

D'autre part, les dérivées à droite et à gauche de g en a et b sont égales (et nulles).

Remarque : De même, $g : [a,b] \to \mathbb{R}\ \ x \longmapsto \begin{cases} (x-a)^{p+1}(b-x)^{p+1} \text{ si } x \in [a,b] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est de classe C^p.

b) *Exemple d'utilisation.*

Prop : Notons F le sev des fonctions de classe C^1 vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est identiquement nulle ssi $\forall g \in F$, $\int_0^1 f(t)g(t)\ dt = 0$.

Preuve : Le sens direct est immédiate. La réciproque est immédiate si $f \in F$, car il suffit de prendre $g = f$.

Supposons f non identiquement nulle. Alors par continuité, il existe un intervalle $[a,b]$ où f est non nulle et de signe constant.

On considère l'application $g \in F$ définie au a) qui est strictement positive sur $]a,b[$ et nulle sinon.

Alors $\int_0^1 f(t)g(t)\ dt = \int_a^b f(t)g(t)\ dt \neq 0$, car fg est de signe constant non nul sur $]a,b[$.

Par contraposition, on en déduit que si $\forall g \in F$, $\int_0^1 f(t)g(t)\ dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

c) *Fonctions C^∞.*

Rappel : La fonction $\varphi : x \longmapsto \begin{cases} e^{-1/x} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Alors } g(x) = \varphi(a+x)\varphi(a-x) \text{ est de classe } C^\infty, \text{ et vérifie } g(x) > 0 \text{ pour } x \in]-a,a[, \text{ et 0 sinon.}}$$