Fonctions usuelles

1) Fonctions usuelles

a) *Fonctions puissances, fonctions exponentielle, fonctions logarithmes*

b) *Fonctions circulaires* cos, sin, tan, cotan

Paramétrisation du cercle unité $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1$ par $\theta \longmapsto (\cos\theta, \sin\theta)$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$.
On a $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$ (cf dérivée de $x \longmapsto e^{ix}$), $\forall x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\tan' = 1 + \tan^2$.

c) *Fonctions circulaires réciproques* arcsin, arccos et arctan

On a : $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Et $\forall x \in]-1,1[\quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\forall x \in]-1,1[\quad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Les valeurs de arctan en $0, \frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}, +\infty$ valent respectivement $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

Important : $\boxed{\arctan x \text{ est l'unique réel } \theta \text{ appartenant à }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ tel que } \tan\theta = x}$.
Ainsi, $\tan(\arctan x) = x$, mais $\arctan(\tan(\alpha))$ est le réel $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ congru à α modulo π.

A connaître : $\forall x \in [-1,1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.
En effet, posons $\theta = \arcsin x$. On a $(\cos\theta)^2 = 1 - (\sin\theta)^2 = 1 - x^2$, et $\cos\theta \geq 0$ car $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

d) *Fonctions hyperboliques* ch, sh, th

Paramétrisation de l'hyperbole $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 1$ par $\theta \longmapsto (\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta)$ et $\theta \longmapsto (-\operatorname{ch}\theta, \operatorname{sh}\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
On a $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.

e) *Fonctions hyperboliques réciproques* argsh, argch et argth

On a : $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$, $\operatorname{argsh} = \operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$.
On a $\forall x \in]1, +\infty[\quad \operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\quad \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et $\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Expression de argch, argsh, argth en fonction de ln :
$\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et $\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

f) *En Maple*

Les fonctions ch, th, argch et argth sont notées `cosh`, `tanh`, `arccosh` et `arctanh`.

2) Trigonométrie

a) *Trigonométrie circulaire et trigonométrie hyperbolique*

Principe : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\operatorname{ch}(z) = \cos(iz)$, $\operatorname{sh}(z) = i\sin(iz)$ et $\operatorname{th}(z) = i\tan(z)$.

Les formules de trigonométrie circulaires sont vraies sur $\mathbb{C}$ (propriétés algébriques sur les e^{iz}). Donc on obtient les formules de trigonométrie hyperbolique en modifiant le signe pour tout produit de deux sin ou tan (car $i^2 = -1$).
D'où :

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$	$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$	$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$	$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$
$1 + \cos x = 2\cos^2(\frac{1}{2}x)$	$1 + \operatorname{ch} x = 2\operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}x)$
$1 - \cos x = 2\sin^2(\frac{1}{2}x)$	$(\operatorname{ch} x) - 1 = 2\operatorname{sh}^2(\frac{1}{2}x)$
Avec $t = \tan(\frac{1}{2}x)$, $(\cos x, \sin x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$	Avec $t = \operatorname{th}(\frac{1}{2}x)$, $(\operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x) = \left(\frac{1+t^2}{1-t^2}, \frac{2t}{1-t^2}\right)$

b) *Trigonométrie réciproque*

Les formules sont obtenues en inversant les formules de trigonométrie.

On a $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta)$ donne $\forall x \in [-1,1]$, $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.

On a $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \dfrac{1}{\tan\theta}$ donne $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$.

Et $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ donne $\arctan(x)+\arctan(y)=\arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ pour x et $y\in]-1,1[$.

3) Exercices

a) *Enoncés*

(1) Représenter $x\longmapsto\sin(\arcsin(x))$ sur $[0,\pi]$, puis sur $[-\pi,\pi]$ puis sur $\mathbb{R}$.

(2) a) Montrer que $\forall x\geq 0$, $\operatorname{argch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ en résolvant $z+z^{-1}=2x$ où $z=e^t$.

b) Montrer que $\forall x\geq 0$, $\operatorname{argsh}=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ en résolvant $z-z^{-1}=2x$ où $z=e^t$.

c) Montrer que $\forall x\in]-1,1[$, $\operatorname{argth}(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ de deux façons :

En intégrant $\operatorname{argth}'(x)=\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$; En inversant l'homographie $\frac{z-1}{z+1}=x$ où $z=e^{2t}$.

(3) Montrer que pour tous x et $y\geq 0$, $\arctan(x)-\arctan(y)=\arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$.

(4) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $\int_0^{\pi/2}(\cos t)^n\,dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,dt$.

(5) On se propose de prouver de deux façons : $\forall x>0$, $\arctan(x)+\arctan(\frac{1}{x})=\frac{\pi}{2}$.

a) En utilisant $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$ avec $\theta=\arctan(x)$: noter en particulier que $\frac{\pi}{2}-\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) En utilisant les relations entre les angles d'un triangle rectangle de côtés 1 et x.

(6) Calculer $A=\cos(\frac{\pi}{8})$, $B=\tan(\arcsin(\alpha))$, $C=\operatorname{sh}^{-1}(1)$, $D=\arctan(\frac{1}{2})+\arctan(\frac{1}{3})$.

Remarque culturelle : De même que pour D, on montre la formule de Machin : $\frac{\pi}{4}=4\arctan(\frac{1}{5})-\arctan(\frac{1}{239})$.
Avec le DSE de $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$, Machin a calculé sans machine (!) les 100 premières décimales de π.
En effet, avec la propriété des restes des séries alternées, on a $\left|\arctan(\frac{1}{5})-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2k+1}(\frac{1}{5})^{2k+1}\right|\leq\frac{1}{2n+1}(\frac{1}{5})^{2n+1}$.

(7) Soit $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\operatorname{th}(\ln(\tan(\theta)))=-\cos(2\theta)$.

(8) Montrer que $f:x\longmapsto\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de cette fonction. Trouver une relation entre $f(x)$ et $\arctan(x)$. Retrouver directement ce résultat.

b) *Corrigé partiel*

(5) On effectue le changement de variable $\cos t=\dfrac{1}{\operatorname{ch} u}$, avec $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $u\in[0,+\infty[$.

On a $(\sin t)\,dt=\dfrac{(\operatorname{sh} u)}{(\operatorname{ch} u)^2}\,du$, et $\sin t=\sqrt{1-(\cos t)^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} u}\right)^2}=\dfrac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u}$. Donc $dt=\dfrac{du}{\operatorname{ch} u}$.

(6) On a $1+\cos(\frac{\pi}{4})=2A^2$ et $A>0$; on pose $\theta=\arcsin(\alpha)$: on a $B^2=(\tan\theta)^2=\frac{(\sin\theta)^2}{(\cos\theta)^2}=\frac{(\sin\theta)^2}{1-(\sin\theta)^2}=\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$.
$C=\frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$ par (2) ; $\tan(D)=\frac{1/2+1/3}{1-1/6}=1$ et $0\leq D<\frac{\pi}{2}$, donc $D=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$.

(7) Posons $t=\tan(\theta)$. Comme $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}[$, alors $t>0$, ce qui justifie l'existence de $\ln t$.

On a : $\operatorname{th}(\ln(t))=\dfrac{e^{\ln t}-e^{-\ln t}}{e^{\ln t}+e^{-\ln t}}=\dfrac{e^{2\ln t}-1}{e^{2\ln t}+1}=\dfrac{t^2-1}{t^2+1}=-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=-\cos(2\theta)$.

(8) On a $|x|<\sqrt{1+x^2}$. Donc $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\in]-1,1[$. Comme arcsin est définie sur $]-1,1[$, alors f est définie sur $\mathbb{R}$.
Comme arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{\left[(1+x^2)-\frac{1}{2}2x\right]}{(1+x^2)^{3/2}}\dfrac{1}{\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{1/2}}=\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\dfrac{1}{(1+x^2)^{-1/2}}=\dfrac{1}{1+x^2}=\arctan'(x)$.

Donc $f-\arctan$ est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0)=\arctan(0)=0$, alors $f=\arctan$.

Preuve directe : Posons $\theta=\arctan(x)$. Comme $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, alors $\cos\theta\geq 0$.

On a $x=\tan\theta$, donc $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\tan(\theta)\sqrt{\cos^2(\theta)}=\tan(\theta)\cos\theta=\sin(\theta)$. Comme $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\theta=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.