

1) Propriété des formes n -linéaires alternées (= antisymétriques) sur un ev de dimension n

a) *Def* : Une forme n -linéaire sur E est une application $f : E \times E \times \dots \times E \rightarrow K$ linéaire en chacune des variables, c'est-à-dire que $x_j \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ est une forme linéaire sur E .

Prop : Soit $f : E^n \rightarrow K$ une forme n -linéaire sur un K - ev E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f(x_1, \dots, x_n)$ est nul si deux des x_j sont égaux (on dit que f est alternée)
- (ii) $f(x_1, \dots, x_n)$ est changé en son opposé si on permute deux vecteurs (on dit que f est antisymétrique)
- (iii) $f(x_1, \dots, x_n)$ est inchangé si on ajoute à un des x_j une combinaison linéaire des autres
- (iv) si (x_1, \dots, x_n) est liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Remarque : Pour prouver (i) implique (ii), on utilise la propriété suivante :

Si B bilinéaire, alors $B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(y, y) + B(x, y) + B(y, x)$.

Donc si B est alternée, alors $B(x, x) = B(y, y) = B(x + y, x + y) = 0$, donc $B(y, x) = -B(x, y)$.

(i) implique (iii) car $f(x_1, \dots, x_j + \sum_{i \neq j} \lambda_i x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i \neq j} \lambda_i \times 0$.

(iii) implique (iv) car un des vecteurs est cl des autres : on se ramène alors au cas où $x_j = 0$.

Les implications (ii) \Rightarrow (i) et (iv) \Rightarrow (i) sont immédiates.

b) *Théorème* : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , où E est un K - ev de dimension n .

On note $\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n -linéaire alternée sur E vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

IMPORTANT : Les formes n -linéaires alternées sur E sont les $\lambda \det_{\mathcal{B}}$.

Autrement dit, le sev des formes n -linéaires alternées sur E est une droite vectorielle.

Ainsi, deux formes n -linéaires alternées non identiquement nulles sont proportionnelles.

Exemple : Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Alors il existe λ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$.

On a alors $\lambda = \det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B} = \det(P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})$.

c) *Preuve du théorème en dimension 2*.

Soient E un K - ev de dimension $n = 2$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E . Soit f une forme n -linéaire sur E .

Pour $x = ae_1 + be_2$ et $y = ce_1 + de_2$, on a par bilinéarité :

$$f(x, y) = f(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = ac f(e_1, e_1) + ad f(e_1, e_2) + bc f(e_2, e_1) + bd f(e_2, e_2)$$

Comme f est alternée, on a $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0$ et $f(e_2, e_1) = -f(e_1, e_2)$. On en déduit

$$f(x, y) = (ac - bd)f(e_1, e_2)$$

Ainsi, toute forme n -linéaire sur E est entièrement définie par $f(e_1, e_2)$.

D'autre part, comme $\det_{\mathcal{B}}(x, y) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, alors $f(x, y) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x, y)$, avec $\lambda = f(e_1, e_2)$.

Remarque : La preuve est analogue en dimension n . On montre en posant $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ et en développant $f(x_1, \dots, x_n)$ que toute forme n -linéaire alternée sur $E = \text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est entièrement déterminée par $f(e_1, \dots, e_n)$, et on obtient aussi une formule explicite de $\det(A)$, où $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

2) Déterminant d'une matrice

a) Définition : \det est l'unique forme n -linéaire alternée sur K^n vérifiant $\det(E_1, \dots, E_n) = 1$.

On obtient ainsi une application \det définie sur $\mathcal{M}_n(K)$ par $\det A = \det(A_1, \dots, A_n)$.

Remarque : En particulier, $\det(\lambda_1 A_1, \lambda_2 A_2, \dots, \lambda_n A_n) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det(A_1, \dots, A_n)$ et $\boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)}$.

b) Propriété de morphisme

Prop : Pour toutes matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\boxed{\det(AB) = (\det A)(\det B)}$.

Corollaire : $\boxed{A \text{ est inversible ssi } \det A \neq 0}$.

dem : Si A est inversible, $(\det A)(\det A^{-1}) = \det I_n$, donc $\det A \neq 0$. La réciproque résulte de 4).

Ainsi, l'application $A \mapsto \det A$ est un morphisme de groupes de $(GL_n(K), \times)$ dans (K^*, \times) .

L'ensemble $SL_n(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(K) \mid \det A = 1\}$ est appelé groupe spécial linéaire.

IMPORTANT : $\boxed{\text{Deux matrices semblables ont le même déterminant}}$.

En effet, si $A' = P^{-1}AP$, alors $\det(A') = (\det P^{-1})(\det A)(\det P) = (\det P)^{-1}(\det A)(\det P) = \det A$.

Idée de la preuve : L'application $f : (B_1, \dots, B_n) \mapsto \det(AB_1, \dots, AB_n)$ est n -linéaire alternée.

Donc il existe λ tel que $\forall B \in \mathcal{M}_n(K)$, $f = \lambda \det$, c'est-à-dire $\forall B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\det(AB) = \lambda \det(B)$.

Avec $B = I_n$, on obtient $\lambda = \det A$. Donc $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

c) Déterminant de la transposée

Prop : $\boxed{\det A = \det(A^T)}$.

Remarque : Le déterminant d'une matrice est aussi une forme n -linéaire alternée des vecteurs lignes (car une matrice et sa transposée ont même déterminant).

d) Déterminant et opérations sur les lignes et les colonnes d'une matrice

Principes.

- L'ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes ne modifie pas le déterminant
- La multiplication d'une colonne par un scalaire α multiplie le déterminant par α .
- La permutation de deux colonnes change le signe du déterminant.

Propriétés analogues sur les opérations de ligne.

Application au calcul du déterminant.

Par une succession d'opérations élémentaires sur les colonnes (ou les lignes), on se ramène à une matrice triangulaire, et on peut en déduire le déterminant. En pratique, on combine souvent plusieurs méthodes de calcul.

Exemple : En opérant sur les lignes, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$.

e) Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Prop : $\text{Soit } M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{q,p} & B \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(K), \text{ avec } A \in \mathcal{M}_p(K) \text{ et } B \in \mathcal{M}_q(K). \text{ Alors } \det M = (\det A)(\det B).$

En particulier, $\det \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline O & A \end{array} \right) = \lambda(\det A),$ pour tous $\lambda \in K$ et $A \in \mathcal{M}_{n-1}(K).$

Corollaire : $\text{Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des coefficients diagonaux} :$

$$\text{On a } \det \left(\begin{array}{cccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{array} \right) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Remarque : C'est le cas en particulier des matrices diagonales : $\det(\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_n.$

IMPORTANT : Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Plus généralement, une matrice triangulaire par blocs est inversible ssi tous les blocs diagonaux sont inversibles.

3) Cofacteurs, développement du déterminant selon une ligne ou une colonne

a) Mineurs et cofacteurs

Def : Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathcal{M}_n(K).$

Soit $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2.$ Le mineur Δ_{ij} est le déterminant d'ordre $(n - 1)$ de la matrice obtenue en supprimant dans A la i -ième ligne et la j -ième colonne. Le cofacteur C_{ij} est défini par : $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$

Remarque : Le signe de $(-1)^{i+j} = (-1)^{|i-j|}$ vaut $+1$ sur la diagonale, puis alterne en fonction de la distance (nombre de cases) à la diagonale. En particulier, pour les indices $(1, n)$ et $(n, 1),$ il vaut $(-1)^{n-1}.$

Prop : Le cofacteur C_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la j -ième colonne par le vecteur canonique $E_i.$ Autrement dit, $C_{ij} = \det(A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, E_i, A_{j+1}, \dots, A_n).$

Preuve : Le fait de déplacer la j -ième colonne en première position multiplie le déterminant par $(-1)^{j-1}.$

En effet, un tel déplacement peut se faire en permutant les colonnes j et $(j - 1),$ puis $(j - 1)$ et $(j - 2),$ etc ...

De même, mettre la i -ième ligne en première position multiplie le déterminant par $(-1)^{i-1}.$

$$\text{D'où : } \det \left(\begin{array}{c|c|c} B & O & C \\ \hline * & 1 & * \\ \hline D & O & E \end{array} \right) = (-1)^{j-1} \det \left(\begin{array}{c|c|c} O & B & C \\ \hline 1 & * & * \\ \hline O & D & E \end{array} \right) = (-1)^{j-1} (-1)^{i-1} \det \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & * & * \\ \hline O & B & C \\ \hline O & D & E \end{array} \right).$$

On reconnaît alors un déterminant par blocs (matrice triangulaire inférieure par blocs).

On obtient donc finalement $(-1)^{i+j} \det \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline D & E \end{array} \right).$ D'où $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$

Remarque : De même (par passage aux transposées), C_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en remplaçant dans A la i -ième ligne par le j -ième vecteur ligne canonique $L_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0).$

b) Développement du déterminant du déterminant selon une colonne ou une ligne

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K).$

i) Développement du déterminant selon la j -ième colonne : $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$

ii) Développement du déterminant selon la i -ième ligne : $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$

Preuve : i) On utilise la linéarité du déterminant d'une matrice par rapport à la j -ième colonne.

En effet, avec $A_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} E_i$, on a $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(A_1, A_2, \dots, A_{j-1}, E_i, A_{j+1}, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$.

ii) Idem par transposition.

Exemple : En développant selon la première colonne,

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} = ab'c'' - ac'b'' - ba'c'' + bc'a'' + ca'b'' - cb'a''.$$

4) Expression de la matrice inverse en fonction de la comatrice

a) Comatrice

Def : La comatrice de A , souvent notée \tilde{A} , est la matrice des cofacteurs, c'est-à-dire $\tilde{A} = (C_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Exemple : La comatrice de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Application des déterminants aux systèmes de Cramer

Prop : Considérons un système de Cramer $(S) : AX = Y$, c'est-à-dire $(S) : \sum_{j=1}^n x_j A_j = Y$, avec $A \in GL_n(K)$.

Alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_j = \frac{\det(A_1, \dots, A_{j-1}, Y, A_{j+1}, \dots, A_n)}{\det(A)}$.

Preuve : Par linéarité, $\det(A_1, \dots, A_{j-1}, Y, A_{j+1}, \dots, A_n) = \sum_{i=1}^n \det(A_1, \dots, A_{j-1}, x_i E_i, A_{j+1}, \dots, A_n)$.

Et comme \det est alterné, on obtient $\det(A_1, \dots, A_{j-1}, x_j A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) = x_j \det A$.

En particulier, en prenant $Y = E_i$: $A^{-1} E_i$ est le vecteur $X = \frac{1}{\det A} (C_{ij})_{1 \leq j \leq n}$.

c) Expression de la matrice inverse en fonction de la transposée de la comatrice (HP)

Corollaire : Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (C_{ji})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \frac{1}{\det A} (\tilde{A})^T$.

Preuve : La j -ième colonne de A est $A^{-1} E_j$, c'est-à-dire $\frac{1}{\det A} (C_{ji})_{1 \leq i \leq n}$.

d) Cas particulier à connaître

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\tilde{A})^T = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

5) Déterminant d'une matrice comme fonction polynomiale de ses coefficients

Les formules précédentes permettent d'exprimer tout déterminant d'ordre n comme combinaisons de n déterminants d'ordre $(n-1)$. On en déduit par récurrence sur n que le déterminant $\det A$ est une expression polynomiale en les coefficients (a_{ij}) de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

Plus précisément, il s'écrit comme la somme de $n!$ termes qui sont, au signe près, le produit de n coefficients de la matrice se trouvant sur des lignes et sur des colonnes distinctes.

Lorsque $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , le déterminant est une fonction continue de ses coefficients. En particulier, si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, alors toute matrice dont les coefficients sont assez proches de ceux de M est aussi inversible (on dit que $GL_n(\mathbb{R})$ est une partie ouverte dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Complément culturel : En fait, on peut expliciter $\det A$.

On a $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$, où S_n est l'ensemble des $n!$ permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$,

et où $\varepsilon(\sigma) = \det(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)}) = (-1)^r$, où r est le nombre d'échanges permettant de transformer la famille $(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(n)})$ en (E_1, \dots, E_n) . Il y a de nombreuses façons de décomposer une permutation σ en produit de transpositions (échanges), mais la parité du nombre r de transpositions est toujours la même.

6) Déterminant d'un endomorphisme

a) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Def : Soit \mathcal{B} une base de E . On définit $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \det A$, où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = (\det P) \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \dots, x_n)$, où $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

En effet, on a $X_j = PX'_j$, donc $A = (X_1, \dots, X_n) = (PX'_1, \dots, PX'_n) = PA'$, d'où $\det A = (\det P)(\det A')$.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Def : Soit $u \in L(E)$. Pour \mathcal{B} base de E , on pose $\boxed{\det u = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)}$.

Cette définition est valide car la valeur de $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}} u)$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} . En effet, deux matrices semblables ont même déterminant.

Exemple : Si u est la symétrie sur F par rapport à G , $\det u = (-1)^q$, où $q = \dim G$.

En effet, dans une base \mathcal{B} adaptée à $F \oplus G = E$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} I_p & O \\ \hline O & -I_q \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(K)$.

Prop : Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\boxed{\det(u \circ v) = (\det u)(\det v)}$ et $\boxed{\det u \neq 0 \text{ ssi } u \in GL(E)}$.

c) Déterminant de l'image d'une famille de vecteurs par un endomorphisme

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et \mathcal{B} une base de E . Alors $\boxed{\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)}$.

Première preuve : Posons $X_j = \text{Mat}_{\mathcal{B}} x_j$, $Y_j = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u(x_j)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}} u$. Alors $Y_j = AX_j$.

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (Y_1, \dots, Y_n) = A(X_1, \dots, X_n) = A \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

En passant aux déterminants, on obtient bien $\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Seconde preuve : Soit \mathcal{B} une base de E . On considère l'application $f : E^n \rightarrow K$ $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n))$.

Par linéarité de u et par n -linéarité de $\det_{\mathcal{B}}$, l'application f est n -linéaire.

D'autre part, si deux x_i sont égaux, il est en de même des $u(x_i)$, donc $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Donc f est alternée.

Par le théorème fondamental, il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$,

Autrement dit, on a $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a $f(x_1, \dots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

En prenant la valeur de f en $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, on obtient $\lambda = f(e_1, \dots, e_n)$, car $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$.

7) Volume dans un espace euclidien (culturel)

On se place dans \mathbb{R}^n . Le choix d'une base \mathcal{B} détermine un volume orienté de référence.

a) $\boxed{\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)}$ est le volume orienté du parallélépipède \mathcal{P} de base (x_1, \dots, x_n) ,

c'est-à-dire défini par $\mathcal{P} = [0, 1]x_1 + \dots + [0, 1]x_n = \{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n\}$.

Remarque : La valeur de $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)|$ ne dépend pas du choix de \mathcal{B} base orthonormée de E .

b) Caractérisation du groupe spécial linéaire

On sait que $\forall(x_1, \dots, x_n), \boxed{\det(u(x_1), \dots, u(x_n)) = (\det u) \det(x_1, \dots, x_n)}$

Ainsi, $\boxed{\det u}$ représente dans \mathbb{R}^n le facteur par lequel sont multipliés les volumes en composant par u .

Remarque : On retrouve immédiatement la relation $\det(u \circ v) = (\det u)(\det v)$.

Remarques :

- Un endomorphisme u conserve les volumes orientés ssi $\det u = 1$, c'est-à-dire ssi $u \in SL(E)$.

- Un endomorphisme u conserve les volumes non orientés ssi $|\det u| = 1$. C'est le cas des isométries (qui conservent les normes, donc le produit scalaire (identité de polarisation), et donc les volumes, mais la réciproque est fausse.

Par exemple, l'endomorphisme $(x, y) \mapsto (2x, \frac{1}{2}y)$ de \mathbb{R}^2 conserve les volumes mais non les normes.

8) Exemple classique : Déterminant de Van der Monde

a) La matrice de Van der Monde est $M(a_1, \dots, a_n) = (a_i^{j-1})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K)$.

La matrice de Van der Monde est la matrice dans les bases canoniques de $K_{n-1}[X]$ et de K^n de l'application linéaire u associée à l'interpolation de Lagrange, c'est-à-dire $u : K_{n-1}[X] \rightarrow K^n \quad P \mapsto (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n))$.

En particulier, $M(a_1, \dots, a_n)$ est inversible ssi les a_i sont deux à deux distincts.

Remarque : Dans ce cas, on a $u^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{j=1}^n y_j L_j$, où les L_j sont les polynômes de Lagrange.

Ainsi, la j -ième colonne de $M(a_1, \dots, a_n)^{-1}$ contient les coefficients de L_j .

b) *Prop* : Le déterminant de Van der Monde est $V(a_1, \dots, a_n) = \boxed{\det M(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}$.

Remarque : Le produit des $(a_j - a_i)$ contient $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$ termes.

Remarque : En particulier, $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ ssi les a_j sont deux à deux distincts.

Preuve : Si deux a_j sont égaux, la matrice admet deux lignes identiques, donc le déterminant est nul.

Supposons désormais a_1, \dots, a_{n-1} deux à deux distincts, et posons $Q(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1}, x)$. En développant selon la dernière colonne, on obtient que Q est un polynôme de degré $(n-1)$ et de coefficient dominant $V(a_1, \dots, a_{n-1})$.

D'autre part, les a_i , avec $1 \leq i \leq n-1$ sont des racines de Q , donc sont les racines de Q .

Et $Q(x) = V(a_1, \dots, a_{n-1})(x - a_1) \dots (x - a_{n-1})$.

Avec $x = a_n$, on obtient la relation de récurrence $V(a_1, \dots, a_n) = V(a_1, \dots, a_{n-1})(a_n - a_1) \dots (a_n - a_{n-1})$.

On conclut alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.