Inégalités usuelles

1) Deux exemples classiques

a) *Exemple* : Pour tout réels x et y, $\boxed{|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)}$, car $(|x|-|y|)^2 \geq 0$.

Exemple : Si $\int_0^{+\infty} f^2$ et $\int_0^{+\infty} g^2$ convergent, alors $\int_0^{+\infty} |fg|$ converge, et $\int_0^{+\infty} |fg| \leq \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f^2 + \int_0^{+\infty} g^2\right)$.

Remarque : On peut aussi prouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\int_0^{+\infty} |fg| \leq \left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} g^2\right)^{1/2}$.

Remarque : Propriété analogue avec les séries : si $\sum u_n^2$ et $\sum v_n^2$ convergent, alors $\sum u_n v_n$ converge.

b) *Exemple* : On a $\boxed{(x_1+x_2+...+x_n)^2 \leq n(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}$, avec égalité ssi les x_i sont égaux.

Première preuve : On utilise Cauchy-Schwarz : $\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)$, avec $y_i = 1$.

Deuxième preuve (moins élégante) : On développe $(x_1+x_2+...+x_n)^2$, et on utilise $\forall i \neq j$, $x_i x_j \leq \frac{1}{2}(x_i^2+x_j^2)$.

2) Majorations uniformes et borne supérieure

a) De très nombreux problèmes d'Analyse consistent à obtenir des majorations indépendantes d'un paramètre.

Exemple : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est majorée ssi il existe M tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq M$.

Ici, M ne dépend pas de x (on pourrait dire que M est une majoration uniforme de $f(x)$ par rapport à x).

Exemple : Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément majorée ssi il existe un majorant de $f_n(x)$ indépendant de x mais aussi de n. Par exemple, les fonctions $f_n : x \longmapsto n\sin(x)$ sont majorées mais non uniformément majorées.

En revanche, les fonctions $f_n : x \longmapsto \sin(nx)$ sont uniformément majorées.

Ne pas confondre $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \leq M$ et $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \leq M$.

La permutation des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ modifie le sens ; dans le premier cas, M peut dépendre de n.

b) *Rappel* : Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

IMPORTANT : $\boxed{\sup_{i\in I} a_i \leq M \text{ ssi } \forall i \in I,\ a_i \leq M}$: Les majorants de A sont les éléments plus grands que $\sup A$.

Exemple : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.

La meilleure constante K telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq K v_n$ est $K = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Il y a un (ou plusieurs) cas d'égalité ssi la borne supérieure est atteinte, c'est-à-dire ssi K est le maximum des $\dfrac{u_n}{v_n}$.

Ainsi, on a $\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\neq(0,\ldots,0)} \dfrac{(x_1+x_2+...+x_n)^2}{(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)} = n$ (et il y a égalité ssi les x_i sont égaux).

Exemple : Soient $a, b > 0$. Si $\forall h > 0$, $x \leq ah + \dfrac{b}{h}$, alors $x \leq \inf_{h>0}\left(ah + \dfrac{b}{h}\right) = 2\sqrt{ab}$.

3) Opérations sur les inégalités

a) Sommation et intégration des inégalités.

Principe : Si $\boxed{\forall t \in [a,b],\ f(t) \leq g(t), \text{ alors } \int_a^b f(t)\ dt \leq \int_a^b g(t)\ dt}$ (valable aussi pour les intégrales impropres).

Exemple : Si $\forall x \geq 1,\ f'(x) \geq \frac{1}{x}$, alors $f(x) - f(1) \geq \ln x$ pour tout $x \geq 1$.

b) Pour majorer un quotient de réels positifs, on majore le numérateur et on minore le dénominateur.

Exemple : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{(n+1)(n+2)}{n^2-n+1} \geq \frac{n^2}{n^2} = 1$.

c) Pour comparer deux réels x et y, on évalue selon les cas $x - y$ ou $\dfrac{x}{y}$ (où ici $y > 0$).

d) *Cas d'égalité dans les sommes d'inégalités.*

Principe : Si $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$, avec égalité ssi $\forall i,\ a_i = b_i$.

e) *Valeur absolue* : On a $|x| = \max(x, -x)$, donc $\boxed{|x| \leq a \text{ équivaut à } x \leq a \text{ et } -x \leq a}$.

f) *Exemple* : $\forall t \in [0, n]$, $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \leq \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-n}$.

En fait, il suffit de prouver $\left(1 - \dfrac{t}{n}\right) \leq e^{-t/n} \leq \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^{-1}$, qui résulte de $e^u \geq 1 + u$, avec $u = \pm\dfrac{t}{n}$.

Exemple : Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan}^2 t \leq \dfrac{1}{t^2} \leq 1 + \operatorname{cotan}^2 t$.

En fait, les inégalités résultent de $\tan t \geq t$ et $\sin t \leq t$.

g) *Suites infra-géométriques.*

Si $\forall n \geq p$, $|u_{n+1}| \leq k\,|u_n|$, alors $\forall n \geq p$, $|u_n| \leq k^{n-p}\,|u_p|$.

4) Inégalités et études de fonctions

Principe : Pour prouver $f(x) \leq 0$, on étudie la fonction f qui permet de déterminer $\sup f$.

Exemple : $\forall x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

Exemple : Supposons $f^{(n)}(t) \in [m, M]$ pour tout $t \in [0, x]$.

En intégrant n fois sur $[0, x]$ l'inégalité : $\forall t \in [0, x]$, $m \leq f^{(n)}(t) \leq M$, on obtient :

$P(x) + m\dfrac{x^n}{n!} \leq f(x) \leq P(x) + M\dfrac{x^n}{n!}$, où $P(x) = \sum f^{(k)}(0)\dfrac{x^k}{k!}$ est le polynôme de Taylor de f en 0 et d'ordre n.

Remarque : On en déduit l'inégalité de Taylor-Lagrange (en prenant $m = \inf f^{(n)}$ et $M = \sup f^{(n)}$).

5) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace muni d'un produit scalaire $(\ \mid\ )$, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique et définie positive.

Alors $\boxed{(x \mid y)^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2}$, avec égalité ssi x et y sont colinéaires.

Remarque : Pour x et y non nuls, on définit alors l'angle θ non orienté de (x, y) par $\cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}$.

Exemple : $\boxed{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}$.

Remarque : Plus généralement, si $\omega_i > 0$, on a $\left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \omega_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n \omega_i y_i^2\right)$.

Exemple : $\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\ dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\ dt\right)}$, avec égalité ssi f et g sont proportionnelles.

Remarque : En l'appliquant à $|f|$ et $|g|$, on obtient $\boxed{\int_a^b |f(t)g(t)|\ dt \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ dt}\sqrt{\int_a^b g(t)^2\ dt}}$.

Remarque : Plus généralement, si $\omega(t) > 0$, on a $\boxed{\left(\int_a^b f(t)g(t)\ \omega(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2\ \omega(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2\ \omega(t)dt\right)}$.

Exemple : $\left(\int_0^1 f(t)\ dt\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)^2\ dt$, et plus généralement, $\left(\int_a^b f(t)\ dt\right)^2 \leq (b-a)\left(\int_a^b f(t)^2\ dt\right)$.

6) Inégalités triangulaires

a) *Première inégalité triangulaire* : $|x+y| \leq |x| + |y|$, et plus généralement, $\boxed{\left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|}$.

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, on a $\left|\sum_{i=1}^n z_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$, avec égalité ssi les z_i non nuls ont le même argument.

Dans tout espace euclidien, $\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$, avec égalité ssi les x_i sont colinéaires de même sens.

ATTENTION : Supposons $0 \leq a_i \leq b_i$. En général, on ne peut pas comparer $\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right|$ et $\left|\sum_{i=1}^n b_i x_i\right|$.

IMPORTANT : Si $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$, $|a_k - b_k| \leq \varepsilon_k$, alors $\left|\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k\right| \leq \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$.

c) *Seconde inégalité triangulaire*

Propriété fondamentale : $\boxed{|x+y| \geq |x| - |y|}$.

Seconde inégalité triangulaire : $||x| - |y|| \leq |x - y|$. La fonction $x \longmapsto |x|$ est 1-lipschitzienne.

b) *Utilisations des inégalités triangulaires pour majorer et pour minorer la valeur absolue d'une somme*

Principe : $\boxed{|A| - |u| \leq |A+u| \leq |A| + |u|}$.

Exemple : Soit $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme complexe de degré n. Alors $\lim_{|z|\to+\infty} P(z) = +\infty$.

En effet, on a $|P(z)| \geq |a_n z^n| - \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \geq |a_n|\,|z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k$, car $\left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k$.

Or, on a $\lim_{\rho\to+\infty} |a_n|\,\rho^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,\rho^k$, car le terme est équivalent à $|a_n|\,\rho^n$.

7) Inégalité de la moyenne

Si $\lambda_i \geq 0$ non tous nuls, alors la valeur moyenne $\dfrac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ est $\leq M = \max_{1\leq i\leq n} x_i$.

On en déduit $\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i x_i| \leq \left(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|\right)\sum_{i=1}^n |a_i|$.

Analogue pour les intégrales : Si $g \geq 0$ non identiquement nulle, la valeur moyenne $\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\ dt}{\int_a^b g(t)\ dt}$ est $\leq \sup f$.

On obtient donc $\left|\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|\ dt \leq \left(\sup_{[a,b]} |f|\right) \times \int_a^b |g(t)|\ dt$.

Exemple : $\left|\int_0^1 f(t)t^n\ dt\right| \leq M\int_0^1 t^n\ dt = \dfrac{M}{n+1}$, où $M = \sup_{[0,1]} |f|$.

Remarque : Noter que cette majoration est plus fine que celle obtenue avec $\left|\int_0^1 \varphi(t)\ dt\right| \leq \sup_{[0,1]} |\varphi|$.

8) Inégalité des accroissements finis et inégalité de Taylor-Lagrange

a) *Inégalité des accroissements finis* : $\boxed{|f(x)-f(a)| \leq |x-a| \sup_{t\in[a,x]} |f'(t)|}$.

Ainsi, une fonction de dérivée bornée est lipschitzienne de rapport $k = \sup |f'|$.

Exemple : $|\sin x| \leq |x|$ et plus généralement $\left|e^{ix} - e^{iy}\right| \leq |x-y|$.

Exemple : Pour $0 < x \leq y$, $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x}}(y-x)$.

b) *Inégalité de Taylor-Lagrange* :

Soit $f : [a,x] \to \mathbb{R}$ de classe C^n. On note $\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)}$ le polynôme de Taylor à l'ordre n de f en a.

Remarque : $P_n(x)$ est l'unique polynôme de degré $\leq n$ qui a les mêmes dérivées que f en a jusqu'à l'ordre n.

$$\boxed{\text{On pose } R_n(x) = f(x) - P_n(x). \text{ Alors } |R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,x]} \left|f^{(n+1)}(t)\right|}$$

Exemple : Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a $|\ln(1+x) - x| \leq 2x^2$.

En effet, $\ln''(1+t) = -\frac{1}{(1+t)^2}$, donc pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a $\left|\ln''(1+t)\right| \leq 4$.

Exemple : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - x| \leq \frac{1}{6}|x|^3$, car $\sup_{\mathbb{R}} \left|\sin^{(3)}\right| = 1$.

c) *Développements en série entière.*

Principe : Si $\lim_{n\to+\infty} |R_n(x)|$, alors $f(x) = \lim_{n\to+\infty} P_n(x)$, c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$.

Exemple : On a $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\max(0,x)} \to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exemple : On a $\forall x \in [0,1]$, $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{1}{n+1}$, car $\ln^{(n+1)}(1+t) = \frac{n!}{(1+t)^{n+1}} \leq n!$

En particulier, on obtient : $\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$.

9) Inégalités de convexité

Une fonction f de classe C^2 est convexe ssi f' croissante (c'est-à-dire $f'' \geq 0$).

L'application f est strictement convexe ssi f' est strictement croissante (donc $f'' > 0$ sur un ensemble dense).

a) *Position du graphe par rapport à ses tangentes et à ses cordes.*

Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.

Exemples à connaître : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$ et $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

b) *Inégalité de convexité* : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Alors $\boxed{f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n}}$.

Ainsi, l'image de la moyenne est inférieure ou égale à la moyenne des images.

Plus généralement, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ et $\alpha_i \geq 0$, alors $f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

Exemple : Comme ln est concave (car $\ln'' \leq 0$), alors pour tous $x_i > 0$, $(x_1 ... x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$.

10) Inégalites et limites

a) *Théorème de passage à la limite des inégalités larges.*

Principe : Si $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent, et si $f(x) \leq g(x)$, alors $\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$.

Exemple : Inégalité à ε près. Pour prouver $x \leq y$, il suffit de prouver que $\forall \varepsilon > 0$, $x \leq y + \varepsilon$.

En effet, en faisant tendre ε vers 0^+ l'inégalité $x \leq y + \varepsilon$, on obtient $x \leq y$.

b) *Théorèmes de pincement.*

Principe : Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $L = \lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x)$, alors $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et vaut L.

Pincement infini : Si $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Important : Ne pas confondre a) et b) : Dans le théorème de pincement, on prouve l'existence d'une limite. Dans le théorème de passage à la limite des inégalités larges, on compare deux limites existentes.

Extension aux équivalents. Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $u(x) \sim_a v(x)$, alors $f(x) \sim_a u(x)$.

11) Inégalités locales (vraies au voisinage d'un point)

a) Deux fonctions équivalentes en a ont même signe au voisinage de a.

En particulier, si $\lim_{x\to a} f(x) = l > k$, alors $f(x) > k$ au voisinage de a.

Exemple : $\boxed{\text{Si } u_n > 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l < k, \text{ alors } u_n = O(k^n)}$.

En effet, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < k$, donc $u_n \leq k^{n-p} u_p$.

Remarque : Plus généralement, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ pour $n \geq p$ assez grand, alors $u_n = O(v_n)$.

b) *Utilisation des développements limités en grand O.*

Exemple : Il existe une constante k tel que $|\ln(1 + x) - x| \leq kx^2$ sur un voisinage de 0.

En effet, $\ln(1 + x) - x = O(x^2)$.

Remarque : Si on veut expliciter k et un voisinage, on utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange.

12) Inégalités et récurrence

a) *Exemple* des suites infra-géométriques : Si $\forall n \geq p$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < k$, donc $u_n \leq k^{n-p} u_p$.

b) *Exemple* : Si $u_{n+2} \geq u_{n+1} + u_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} v_0 = u_0 \text{ et } v_1 = u_1. \\ v_{n+1} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$

c) *Cas générique* : Supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq f(u_n)$, avec f croissante.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq v_n$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = u_0$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.

En effet, si on a $u_n \geq v_n$, alors $u_{n+1} \leq f(u_n) \leq f(v_n) = v_{n+1}$, et on a bien $u_0 \leq v_0$. D'où le résultat par récurrence.