Notions importantes en algèbre linéaire

Endomorphismes

1) Codages matriciels et matrices semblables

a) La matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(e_1), ..., u(e_n))$.

Ainsi, a_{ij} est la i-ième coordonnée de $u(e_j)$: on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_j$.

Remarque : Avec E euclidien et $\mathcal{B}$ base orthonormée, on a donc $a_{ij} = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

b) *Changements de bases* : $A' = P^{-1}AP$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u$ et $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$.

c) *Matrices semblables* : Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $B = P^{-1}AP$

(ii) A et B représentent un même endomorphisme : il existe E, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u$.

Remarque : Pour prouver (i) implique (ii), on peut prendre $E = K^n$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de K^n. On définit alors $\mathcal{B}'$ par $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P$. Autrement dit, les colonnes de P sont les vecteurs de $\mathcal{B}'$ (exprimés dans $\mathcal{B}$).

d) *Important* : Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$, alors $A^k = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (et $k \in \mathbb{Z}$ si u inversible).

En particulier, si A et B sont semblables, alors A^k et B^k, avec la *même* matrice de passage.

Matriciellement : Si $B = P^{-1}AP$, $B^k = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP) = P^{-1}A^kP$.

e) *Trace d'une matrice carrée.*

On a $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. On a alors $\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \mathrm{tr}(BA)$

Donc deux matrices semblables ont nécessairement même trace : $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$.

f) *Exemple* : $M = (\delta_{i,j+1})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$: L'endomorphisme associé est $u : (x_1, ..., x_n) \longmapsto (x_2, ..., x_n, 0)$.

Donc $u^k : (x_1, ..., x_n) \longmapsto (x_k, ..., x_n, 0, 0, ..., 0)$ et $J^k = (\delta_{i,j+k})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

2) Sous-espaces stables

a) *Def* : Soit F un sev de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u ssi $u(F) \subset F$.

Dans ce cas, on peut considérer $u_{|F} : x \longmapsto u(x)$ restriction de u à F, et $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

b) *Lien avec les matrices triangulaires supérieures par blocs* $M = \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right)$, avec $A \in \mathcal{M}_p(K)$.

F est un sev stable par u ssi dans une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ adaptée à $F \oplus S = E$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = M$.

Dans ce cas, A est la matrice de $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}_1 = (e_1, ..., e_p)$.

Important : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est triangulaire supérieure ssi $\forall j$, $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_j)$ est stable par u, où $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

c) *Lien avec les vecteurs propres* : La droite Kx est stable par u ssi x est un vecteur propre de u.

Important : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est diagonale ssi $\mathcal{B}$ est une base de E composée de vecteurs propres de u.

Plus précisement, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ ssi $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

d) *Lien avec les matrices compagnons* : $M = \begin{pmatrix} 0 & & & & a_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 1 & 0 & a_{p-2} \\ & & & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(K)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Il existe un plus petit entier p tel que $(x, u(x), ..., u^p(x))$ est liée.

Dans ce cas, $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre et $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$.

Le sev $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est stable par u et admet $\mathcal{B}_1 = (x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ comme base.

La matrice de $u_{|F}$ dans la base $\mathcal{B}_1$ est une matrice compagnon, avec $u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$.

Exemple : On considère $A \in \mathcal{M}_2(K)$.

Alors A est soit une homothétie soit semblable à une matrice compagnon $M = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

e) *Réduction des endomorphismes nilpotents d'ordre 2.*

Rappel : $v \circ u = 0$ ssi $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$..

On a $u^2 = 0$ ssi il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $r \leq \frac{1}{2}n$.

2) Noyaux et images itérés

Rappel : $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u) \supset \operatorname{Ker} u$.

a) On a $\operatorname{Im}(u^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(u^k)$ et $\operatorname{Ker}(u^{k+1}) \supset \operatorname{Ker}(u^k)$.

Plus précisement, on a : $\operatorname{rg}(u^{k+1}) = \operatorname{rg}(u^k) - \dim(\operatorname{Im} u^k \cap \operatorname{Ker} u)$.

On a $\operatorname{Im}(u^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(u^k)$ ssi $\operatorname{Im} u^k \oplus \operatorname{Ker} u$, donc ssi la restriction de u à $\operatorname{Im}(u^k)$ est bijective.

b) Décomposition de Fitting : il existe un plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{Im} u^p \oplus \operatorname{Ker} u^p = E$.

Dans une base adaptée, on a alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & N \end{array}\right)$, avec A inversible et N nilpotent d'ordre p.

Remarque : La restriction de u à $\operatorname{Im}(u^p)$ est bijective ssi celle de u^p à $\operatorname{Im}(u^p)$ est bijective.

Déterminants

1) Déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(K)$

- Le déterminant est une forme n-linéaire alternée des colonnes (ou des lignes). On a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

On peut ainsi calculer le déterminant en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes et colonnes.

- *Déterminants par blocs.*

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit de déterminants des blocs diagonaux.

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux. On a $\det A = \det(A^T)$.

- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. On a $\det A \neq 0$ ssi A est inversible.

- *Développement selon une ligne ou une colonne* :

$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} C_{ij}$ et $\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} C_{ij}$, avec les cofacteurs $C_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$.

On en déduit par récurrence sur n que $\det A$ est un polynôme en a_{ij} de degré (total) n.

Remarque culturelle : $\det A = \sum_{\sigma \text{ bijection}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j}$, où $\varepsilon(\sigma) = \det(E_{\sigma(1)}, ..., E_{\sigma(n)}) \in \{-1, 1\}$.

Remarque culturelle : Avec $C = (C_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ la matrice des cofacteurs et $\det A \neq 0$, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} C^T$.

En particulier pour $n = 2$: Si $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Remarque : Pour $n \geq 3$, il est plus efficace de calculer A^{-1} en résolvant $AX = Y$ (pour tout Y) par Gauss.

2) Déterminant d'un endomorphisme et déterminant dans une base $\mathcal{B}$ d'une famille de vecteurs

a) *Déterminant d'un endomorphisme*

Deux matrices semblables ont même déterminant : $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) = \det(A)$.

On définit $\det u$ comme le déterminant des matrices sui le représentent.

b) *Déterminant dans une base $\mathcal{B}$ d'une famille de vecteurs* : $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \det A$, où $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

On a $\det_{\mathcal{B}} \mathcal{B} = 1$ et $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}(x_1, ..., x_n)$, où $\lambda = \det_{\mathcal{B}} \mathcal{B}' = \det(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})$: Résulte de $X = PX'$.

Dans un espace euclidien, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est le volume orienté du parallélépipède engendré par les x_i et de volume de référence $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que le volume de $[0,1]e_1 + ... + [0,1]e_n$ est pris égal à 1).

c) On a $\det_{\mathcal{B}}(u(x_1), ..., u(x_n)) = (\det u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$.

Dans un espace euclidien, $\det u$ est le facteur par lequel les volumes sont multipliés.

3) Déterminant et systèmes linéaires

On considère le système inversible $AX = B$. Alors $x_j = \dfrac{\det(A_1, ..., A_{j-1}, B, A_{j+1}, ..., A_n)}{\det A}$.

En effet, on a $B = \sum_{j=1}^{n} x_j A_j$, donc $\det(A_1, ..., A_{j-1}, B, A_{j+1}, ..., A_n) = x_j \det(A_1, ..., A_j, ..., A_n)$.