Evaluations des sommes et des intégrales

1) Encadrements élémentaires

Principes : $\boxed{n\min_{p\le k\le q}(a_k) \le \sum_{k=p}^{q} a_k \le n\max_{p\le k\le q}(a_k)\text{, où } n=(q-p+1) \text{ est le nombre de termes}}$.

De même, $\boxed{(b-a)\inf_{[a,b]} f \le \int_a^b f(t)\ dt \le (b-a)\sup_{[a,b]} f}$.

Inégalité triangulaire : $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k\right| \le \sum_{k=p}^{q} |a_k| \le n\max_{p\le k\le q}|a_k|$ et $\boxed{\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\ dt \le (b-a)\sup_{[a,b]}|f|}$.

Exemple : (♣) $\frac{1}{2} \le \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \le 1$ et $\frac{1}{4n} \le \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2} \le \frac{1}{n}$.

Exemple : (♣♣) Posons $u_n = \int_n^{4n} \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^p}}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge ssi $\frac{1}{2}p-1>1$, c'est-à-dire $p>4$.

En effet, $\frac{3n}{\sqrt{1+(4n)^p}} \le \int_n^{4n} \frac{dt}{\sqrt{1+t^p}} \le \frac{3n}{\sqrt{1+n^p}}$, et on a $\frac{3n}{\sqrt{1+(4n)^p}} \sim \frac{3}{2^p}\frac{1}{n^{p/2-1}}$ et $\frac{3n}{\sqrt{1+n^p}} \sim \frac{1}{n^{p/2-1}}$.

Exemple : (♣♣) On a $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln t} = +\infty$, car $\int_x^{2x} \dfrac{dt}{\ln t} \ge \dfrac{x}{\ln(2x)} \to +\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) Inégalités de la moyenne

Principe : $\left|\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right| \le \int_a^b |f(t)g(t)|\ dt \le \sup_{[a,b]}|f| \int_a^b |g(t)|\ dt$.

Conseil : Refaire le calcul à chaque utilisation, afin de ne pas oublier la valeur absolue pour $|g(t)|$.

Exemple : (♣♣♣) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue. Posons $I_n = \int_0^1 f(t)\ t^n dt$. Alors $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Une majoration de base donne $|I_n| \le \sup_{[0,1]}|f|$ et ne permet pas de conclure.

En revanche, on a $|I_n| = \boxed{\left|\int_0^1 f(t)\ t^n dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\ t^n dt \le \sup_{[0,1]}|f| \int_a^b t^n dt = \frac{1}{n+1}\sup_{[0,1]}|f|} \to 0$ lorsque $n\to+\infty$.

Principe : De même, pour les sommes, on a $\left|\sum_{k=p}^{q} a_k x_k\right| \le (\max_{p\le k\le q}|x_k|)\sum_{k=1}^{n}|a_k|$.

Et pour les séries : $\boxed{\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_n\right| \le (\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n|)\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|}$.

Exemple : (♣♣) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} x_n \le \sup_{n\in\mathbb{N}^*}(x_n)$, avec égalité ssi tous les x_n sont égaux.

Remarque : Comme $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} x_n$ est la moyenne des x_n pondérés par 2^{-n}.

3) Comparaisons entre sommes et intégrales

Il s'agit dévaluer une somme de la forme $\sum_k g(k)$ à l'aide d'intégrales $\int_I g(t)\ dt$.

a) Sommes de Riemann

Principe : On considère $\boxed{S_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)\text{, où } f:[0,1]\to\mathbb{R} \text{ continue. Alors } \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f(t)\ dt}$.

Comentaire : La variable discrète $\frac{k}{n}$ associée à un pas $\frac{1}{n}$ correspond dans l'intégrale à la variable continue t.

Remarque : On peut remplacer $\sum_{k=1}^{n}$ par $\sum_{k=0}^{n}$, puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} f(0) = 0$.

Remarque : Plus généralement, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{pn} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^p f(t)\ dt$.

Remarque culturelle : La formule d'Euler-MacLaurin donne un développement limité de S_n, en commençant par exprimer les écarts entre l'intégrale et l'approximation par des trapèzes à l'aide de la dérivée de f.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\ln 2$, car $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}\to\int_0^1\frac{dt}{1+t}=\ln 2$.

Exemple : ($\clubsuit$) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{\pi}{4}$, car $\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}\to\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\arctan 1$.

b) Cas d'une fonction monotone

Principe : Soit f continue décroissante. Alors $\boxed{\int_p^{q+1}f(t)\ dt\le\sum_{k=p}^{q}f(k)\le\int_{p-1}^{q}f(t)\ dt}$.

Remarque : La longueur des intervalles d'intégration est le nombre de termes de la somme, ici $(q-p+1)$.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) Si $f:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ décroissante positive, $\int_1^{+\infty}f(t)\ dt\le\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)\le\int_0^{+\infty}f(t)\ dt$.

Souvent (notamment si $\int_0^1 f(t)\ dt=+\infty$), on considère plutôt : $\sum_{n=1}^{+\infty}f(n)\le f(1)+\int_1^{+\infty}f(t)\ dt$.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k}=\ln 2}$, car $\ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)=\int_{n+1}^{2n+1}\dfrac{dt}{t}\le\sum_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k}\le\int_n^{2n}\dfrac{dt}{t}=\ln 2$.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{n}{k^2+n^2}=\dfrac{\pi}{4}$.

En effet, on a $\int_0^n\frac{dt}{t^2+n^2}\le\int_0^{n+1}\frac{dt}{t^2+n^2}\le\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}\le\frac{1}{n}+\int_0^n\frac{dt}{t^2+n^2}=\frac{1}{n}$, et $\int_0^n\frac{dt}{t^2+n^2}=\frac{1}{n}\left[\arctan\left(\frac{t}{n}\right)\right]_0^n\to\frac{\pi}{4}$.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) Pour $\alpha>1$, posons $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\dfrac{1}{k^\alpha}$. On a $\int_{n+1}^{+\infty}\dfrac{dt}{t^\alpha}\le R_n\le\int_n^{+\infty}\dfrac{dt}{t^\alpha}$, donc $R_n\sim\dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit$) Pour $p\ge 0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}k^p\sim\dfrac{n^{p+1}}{p+1}$ car $\int_0^n t^p\ dt\le S_n\le\int_1^{n+1}t^p\ dt$ (ici, la fonction est croissante).

IMPORTANT : Les équivalents précédents peuvent être obtenus avec les sommes de Riemann. Mais la comparaison directe avec une intégrale est plus simple à mettre en œuvre et permet d'obtenir un encadrement des sommes. D'autre part, elle convient aussi dans des cas où les sommes ne sont pas des sommes de Riemann :

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit$) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+\sqrt{n}}\sim\ln(\sqrt{n})=\frac{1}{2}\ln n$, car $\int_1^{n+1}\frac{dt}{t+\sqrt{n}}\le S_n\le\int_0^n\frac{dt}{t+\sqrt{n}}$.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\sum u_n=+\infty$.

On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Alors pour tout $\alpha>1$, $\sum\dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}$ converge.

En effet, $0\le\dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}=\dfrac{S_n-S_{n-1}}{(S_n)^\alpha}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\dfrac{dt}{(S_n)^\alpha}\le\int_{S_{n-1}}^{S_n}\dfrac{dt}{t^\alpha}$. Or, $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\dfrac{dt}{t^\alpha}=\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{t^\alpha}<+\infty$.

Donc la série $\sum\dfrac{u_n}{(S_n)^\alpha}$ converge.

b) Cas général (fonction non nécessairement monotone)

Principe : $\left|\int_n^{n+1}f(t)\ dt-f(n)\right|\le\frac{1}{2}\sup_{[n,n+1]}|f'|$, obtenu en intégrant $|f(t)-f(n)|\le(t-n)\sup_{[n,n+1]}|f'|$.

4) Comparaisons entre deux intégrales

Principe : Pour évaluer $\int_a^b f(t)\ dt$, on considère une fonction g proche de f telle que $\int_a^b g(t)\ dt$ s'évalue aisément.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) On a $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\dfrac{dt}{\ln(1+t)}=\ln 2$.

En effet, lorsque t tend vers 0, $\ln(1+t)\sim t$. On considère donc $\int_x^{2x}\dfrac{dt}{t}$, qui vaut $\ln 2$.

Il reste à majorer l'écart : $\left|\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t)}-\int_x^{2x}\frac{1}{t}\right|\le\int_x^{2x}h(t)\ dt$, avec $h(t)=\frac{1}{\ln(1+t)}-\frac{1}{t}$.

Or, la fonction h est prolongeable par continuité en $t=0$, avec $h(0)=\frac{1}{2}$.

Donc $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} h(t)\ dt=\lim_{x\to 0}[H(t)]_x^{2x}=0$ (variante : on majore par $|x|\sup_{[-2\alpha,2\alpha]}|h|$, pour $|x|\leq\alpha$).

5) Regroupements judicieux

a) Regroupements de termes consécutifs dans les sommes et les séries alternées

Exemple : (♣♣) Pour $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n(-1)^k\dfrac{n^k}{k!}$ est positive si n est pair et négative si n est impair.

En effet, si n impair, $\sum_{k=0}^n u_k=(u_0-u_1)+(u_2-u_3)+...+(u_{n-1}-u_n)\leq 0$ si (u_k) croît.

Et si n pair, $\sum_{k=0}^n u_k=u_0+(-u_1+u_2)+(-u_3+u_4)+...+(-u_{n-1}+u_n)\geq 0$ si (u_k) croît.

Exemple : (♣) Si f décroissante, alors $\int_0^{2\pi}f(t)\sin(t)\ dt\geq 0$. L'idée est de regrouper $f(t)$ avec $f(t+\pi)$, d'où :

$\int_0^{2\pi}f(t)\sin(t)\ dt=\int_0^{\pi}f(t)\sin(t)+\int_0^{\pi}f(t+\pi)\sin(t+\pi)\ dt=\int_0^{\pi}(f(t)-f(t+\pi))\sin(t)\ dt\geq 0.$

Exemple : (♣♣♣) On cherche un équivalent de $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On a $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n+x}-\frac{1}{2n+1+x}\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+x)(2n+1+x)}$.

On encadre alors par des intégrales : $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(2t+x)(2t+1+x)}\leq f(x)\leq\frac{1}{x(x+1)}+\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(2t+x)(2t+1+x)}$.

Comme $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(2t+x)(2t+1+x)}=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{2t+x}-\frac{1}{2t+1+x}\right)\ dt=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2t+x}{2t+1+x}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\sim\frac{1}{2x}$. Donc $f(x)\sim\frac{1}{2x}$.

b) Regroupements par blocs de termes de même nature

Exemple : (♣) Soit $f:[0,+\infty[$ périodique de période 1. Alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt=\int_0^1 f(t)\ dt$.

L'idée est de regrouper les $f(t)$, pour $t\in[n,n+1]$, car $\int_n^{n+1}f(t)\ dt=\int_0^1 f(t)\ dt$. Avec $x=n+r$, où $r\in[0,1]$, on a $\int_0^x f(t)\ dt=n\int_0^1 f(t)\ dt+R(x)$, avec $R(x)=\int_n^x f(t)\ dt=\int_0^r f(t)\ dt$. Donc $|R(x)|\leq\int_0^r|f(t)|\ dt\leq\int_0^1|f(t)|\ dt$.

Remarque : Si f est T-périodique, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt$ (valeur moyenne de f).

Exemple : (♠) La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{(-1)^{E(\sqrt{n-1})}}{n}$ converge. On note $S(n)$ la somme partielle.

On regroupe les termes selon la valeur de $E(\sqrt{n-1})$. On a $E(\sqrt{n-1})=p$ ssi $n\in[\![p^2+1,(p+1)^2]\!]$.

On a $S(q^2)=\sum_{p=0}^{q-1}(-1)^p u_p$, où $u_p=\sum_{k=p^2+1}^{(p+1)^2}\frac{1}{k}$.

On encadre (élémentairement) u_p : on obtient $u_p=\frac{2}{p}+O\left(\frac{1}{p^2}\right)$. Donc la série $\sum_{p\in\mathbb{N}}(-1)^p u_p$ converge.

Donc la suite $(S(p^2))_{p\in\mathbb{N}}$ converge, et comme $S(n)$ oscille entre les $S(p^2)$, on en déduit que $(S(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6) Intégrations par parties

Exemple : (♣♣♣) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $I(\lambda)=\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\ dt$.

Alors il existe K tel que $\forall\lambda>0$, $|I(\lambda)|\leq\frac{K}{\lambda}$. En particulier, $\lim_{\lambda\to+\infty}I(\lambda)=0$ (*lemme de Lebesgue*).

En effet, $|I(\lambda)|=\frac{1}{\lambda}\left|f(a)\cos(\lambda a)-f(b)\cos(\lambda b)+\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\ dt\right|$.

Donc $K=|f(a)|+|f(b)|+\int_a^b|f'(t)|\ dt$ convient (constante indépendante de λ).

Exemple : (♣♣) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de classe C^1. Alors $\int_0^1\dfrac{f(t)}{1+t}dt=\dfrac{f(1)}{n+1}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

En effet, $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\ dt = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{f'(t)t^{n+1}}{(1+t)^2}\ dt$, et $\left|\int_0^1 \frac{f'(t)t^{n+1}}{(1+t)^2}\ dt\right| \leq K\int_0^1 t^{n+1}\ dt = \frac{M}{n+2}$, où $K = \sup_{[0,1]} |f'|$.

On en déduit que $\int_0^1 \frac{f'(t)t^{n+1}}{(1+t)^2}\ dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}\ dt = \frac{f(1)}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Remarque : Si f est de classe C^2, on peut obtenir un $DL_n(+\infty)$ en intégrant n fois par parties.

Par exemple, $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ dt = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{n+1}\frac{1}{n+2} + \mathfrak{o}(\frac{1}{n^2}) = \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{4n^2} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exemple : (♣♣♣) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On pose $I(\lambda) = \int_a^b f(t)\ \sin(\lambda t)\ dt$.

Alors il existe K tel que $\forall \lambda > 0$, $|I(\lambda)| \leq \dfrac{K}{\lambda}$. En particulier, $\lim_{\lambda\to+\infty} I(\lambda) = 0$ (lemme de Lebesgue).

En effet, on a $I(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}\left[f(t)\ \cos(\lambda t)\right]_a^b - \dfrac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\ \cos(\lambda t)\ dt$, donc $K = |f(a)| + |f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\, dt$ convient.

7) Couper les sommes

Il s'agit généralement de problèmes de type Cesàro.

Exemple : (♣♣♣) (Cesàro pour les fonctions) Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt = L$.

On se ramène au cas $L = 0$ en posant $f(t) = L + g(t)$, où $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

Alors $\left|\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\ dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^a |g(t)|\ \ dt + \frac{x-a}{x}\int_a^x |g(t)| \leq \frac{1}{x}\int_0^a |g(t)|\ \ dt + \frac{x-a}{x}\sup_{t\in[a,x]} |g(t)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. On choisit a assez grand de sorte que $\sup_{t\in[a,x]} |g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $x \geq x_0$ assez grand, $\frac{1}{x}\int_0^a |g(t)|\ \ dt \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Exemple : (♣♣) Si $f(x) = \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$, alors $\int_0^x f(t)\ dt = \mathfrak{o}(\ln x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc a (assez grand) tel que $f(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{x}$ pour tout $x \geq a$.

On en déduit que pour tout $x \geq a$, $\left|\int_a^x f(t)\ dt\right| \leq \int_a^x |f(t)|\, dt \leq \int_a^x \dfrac{\varepsilon}{t}\ dt = \varepsilon(\ln x - \ln a)$.

Donc, pour tout $x \geq a$, $\left|\int_0^x f(t)\ dt\right| \leq \left|\int_0^a f(t)\ dt\right| + \left|\int_a^x f(t)\ dt\right| \leq \varepsilon \ln x + K$, où K est indépendant de x.

Pour $x \geq b$ assez grand, on a $K \leq \varepsilon \ln x$. On en conclut que $\forall x \geq \max(a,b)$, $\left|\int_0^x f(t)\ dt\right| \leq 2\varepsilon \ln x$.

Comme ε est arbitraire, 2ε peut être rendu arbitrairement petit, donc $\int_0^x f(t)\ dt = \mathfrak{o}_{+\infty}(\ln x)$.

Exemple : (♣♣) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et $\varepsilon > 0$. On suppose que $|a_n| \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Alors $\left|\sum_{k=0}^n 2^{-k} a_{n-k}\right| \leq 3\varepsilon$ pour n assez grand.

En effet, il existe p de sorte que $\forall k \geq p$, $|a_k| \leq \varepsilon$.

Donc pour tout $n \geq p$, $\left|\sum_{k=0}^n a_k 2^{k-n}\right| \leq 2^{-n}A + \varepsilon\sum_{k=p}^n 2^{n-k}$, avec $A = \sum_{k=0}^p |a_k|\, 2^{-k}$.

Or, on a $\sum_{k=p}^n 2^{n-k} \leq 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-p}} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} 2^j = 2$.

Comme $n \geq q$ assez grand, $2^{-n}A \leq \varepsilon$. Donc pour $n \geq \max(p,q)$, $\left|\sum_{k=0}^n a_k 2^{k-n}\right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon$.

Remarque : On en déduit que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n a_k 2^{k-n} = 0$.

Remarque : $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n a_k 2^{k-n}$ est proche du barycentre des a_k pondérés par 2^{k-n}, puisque $\frac{1}{2}\sum_{k=0}^n 2^{k-n} \to 1$.