Rang d'une application linéaire

1) Rang d'une application linéaire et d'une matrice

a) *Def* : Soit $u : E \to F$ linéaire. On pose $\boxed{\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im}(u))}$, appelé rang de l'application linéaire u.

Prop : Soit $(e_1, ..., e_p)$ une base de E. Alors $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(e_1), ..., u(e_p))$.

Remarques : $\operatorname{rg}(u) \leq \min(\dim E, \dim F)$.

Exemple : (♣♣) Pour tous u et $v \in \mathcal{L}(E, F)$, on a : $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v) \leq \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

En effet, on a $\operatorname{Im}(u + v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, d'où $\operatorname{rg}(u + v) \leq \dim(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v) \leq \dim(\operatorname{Im} u) + \dim(\operatorname{Im} v)$.

Remarque : la dernière inégalité résulte de $\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$.

On raisonne ensuite par analogie avec le passage de la première inégalité triangulaire à la seconde.

On a en effet $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u + v - v) \leq \operatorname{rg}(u + v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u + v) + \operatorname{rg}(v)$.

De même, $\operatorname{rg}(v) \leq \operatorname{rg}(u + v) + \operatorname{rg}(u)$. D'où finalement, $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leq \operatorname{rg}(u + v)$.

b) *Def* : Le rang de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ est le rang de l'application linéaire associée

$$u : K^p \to K^n \quad X = (x_1, ..., x_p) \longmapsto AX = x_1 A_1 + ... + x_p A_p \text{ (produit par blocs)}$$

Les colonnes A_j de A sont les images des vecteurs de la base canonique : $AE_j = A_j$.

Autrement dit, A est la matrice de u dans les bases canoniques respectives de K^p et K^n.

On a donc $\boxed{\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(A_1, ..., A_p)}$.

Le rang d'une matrice est le rang de ses p vecteurs colonnes dans K^n.

Remarque : Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{C}$ base de F, alors $\operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} u) = \operatorname{rg} u$.

Exemple : (♣♣♣) Toute matrice de la forme $B = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ sont de rang ≤ 1.

Application : On considère $A \in \mathcal{M}_n(K)$, avec $a_{ij} = \alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i$.

Notons $B = (\alpha_i \beta_j)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ et $C = (\alpha_j \beta_i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$. Alors $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B + C) \leq \operatorname{rg}(B) + \operatorname{rg}(C) \leq 1 + 1 = 2$:

2) Théorème du rang

a) *Lemme fondamental* : Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ dans E.

Ainsi, on a $\boxed{S \oplus \operatorname{Ker} u = E. \text{ Alors la restriction } v : S \to \operatorname{Im} u \ \ x \longmapsto u(x) \text{ est un isomorphisme.}}$

b) *Théorème du rang* : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est de dimension finie. Alors $\boxed{\operatorname{rg} u = \dim E - \dim(\operatorname{Ker} u)}$.

Remarque : On a $\operatorname{rg} u = \dim E$ ssi u est injective et $\operatorname{rg} u = \dim F$ ssi F est surjective.

Exemple : (♣♣♣) Soient u et $v \in \mathcal{L}(E)$, avec $n = \dim E$. Si $v \circ u = \widetilde{0}$, alors $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leq n$.

En effet, on a $v \circ u = 0$ ssi $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$.

On en déduit que si $v \circ u = 0$, alors $\operatorname{rg} u \leq \dim \operatorname{Ker} v$, donc on conclut $\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leq n$ par le théorème du rang.

3) Corollaires du théorème du rang

a) *Th* : Soit $u \in \mathcal{L}(E, E')$ et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\boxed{\dim u(F) = \dim F - \dim(\operatorname{Ker} u \cap F)}$.

Preuve : On applique le théorème du rang à la restriction $u_{|F} : F \to E'$.

En effet, on a $\operatorname{Ker} u_{|F} = \operatorname{Ker} u \cap F$ et $\operatorname{Im} u_{|F} = u(F)$.

Remarque : On a $\dim u(F) \leq \dim F$, avec égalité ssi $\operatorname{Ker} u$ et F sont en somme directe.

Corollaire : Rang d'une composée : On a $\boxed{\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}\, u - \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, v)}$.

Exemple : Si u est un endomorphisme de E, $\mathrm{rg}(u^2) = \mathrm{rg}\, u$ ssi $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u$, et dans ce cas, $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u = E$.

Remarque : Pour F' sev de E', on a : $\dim u^{-1}(F') = \dim F' + \dim \mathrm{Ker}\, u$.

On applique en effet le théorème à $F = u^{-1}(F')$. On a $u(F) = F'$ et $\mathrm{Ker}\, u \cap F = F$, car $F \subset \mathrm{Ker}\, u$.

4) Caractérisation des isomorphismes en dimension finie.

a) *Prop* : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose $\dim E = \dim F = n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u injective, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\, u = \{0\}$,

(ii) u surjective, c'est-à-dire $\mathrm{Im}\, u = F$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, u = n$

(iii) u bijective

Exemple : Interpolation de Lagrange : Soient $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ distincts.
On considère $u : K_{n-1}[X] \to K^n \quad P \longmapsto (P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n))$. L'application u est linéaire et injective.
Comme $\dim K_{n-1}[X] = \dim K^n = n$, u est bijective, c'est-à-dire que pour tout $(y_1, y_2, ..., y_n) \in K^n$, il existe un unique $P \in K_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $P(\alpha_i) = y_i$.

b) *Matrices inversibles. Prop* : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A injective, c'est-à-dire $(AX = 0 \Rightarrow X = O)$, ce qui équivaut aussi à $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $BA = I_n$.
(ii) A surjective, c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, A = n$, ce qui équivaut aussi à $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $AB = I_n$.
(iii) A bijective, c'est-à-dire $A \in GL_n(K)$, ce qui équivaut aussi à $\exists\, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $AB = BA = I_n$.

5) Images itérées d'un endomorphisme (en dimension finie) (*complément culturel*)

a) Il s'agit d'étudier les $\mathrm{Im}\, u^k$ et les $\mathrm{rg}\, u^k = \dim(\mathrm{Im}\, u^k)$.
On peut tout d'abord noter que $u(\mathrm{Im}\, u^k) = \mathrm{Im}\, u^{k+1} = u^k(\mathrm{Im}\, u) \subset \mathrm{Im}\, u^k$. Ainsi, $\mathrm{Im}\, u^k$ est stable par u.
La suite $(\mathrm{Im}\, u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante (au sens de l'inclusion) et la suite $(\mathrm{rg}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

Plus précisement, on a : $\mathrm{rg}(u^{k+1}) = \mathrm{rg}(u^k) - \dim(\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im}\, u^k)$.

b) La suite $(\mathrm{Im}\, u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang :
Comme la suite $(\mathrm{rg}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ est décroissante, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{rg}(u^{p+1}) = \mathrm{rg}(u^p)$.
La restriction de u à $\mathrm{Im}\, u^p$ est un isomorphime, c'est-à-dire $u(\mathrm{Im}\, u^p) = \mathrm{Im}\, u^p$.
Par récurrence, $\mathrm{Im}\, u^k = \mathrm{Im}\, u^p$ pour tout $k \geq p$.

Remarque : Comme $\mathrm{rg}(u^{p+1}) = \mathrm{rg}(u^p)$, on a $\mathrm{Ker}\, u \oplus \mathrm{Im}\, u^p$.
En fait, on a même $\mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p)$, car $\mathrm{rg}(u^p \circ u^p) = \mathrm{rg}(u^p)$.

Et par dimension, $\mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p) = E$. Les espaces $\mathrm{Ker}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u^p)$ sont stables par u.

La restriction de u à $\mathrm{Ker}\, u^p$ est nilpotente, et la restriction de u à $\mathrm{Im}(u^p)$ est un automorphisme.

Ainsi, dans une base adaptée à $\mathrm{Ker}(u^p) \oplus \mathrm{Im}(u^p) = E$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \left(\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right)$, avec $A^p = O$ et B inversible.

6) Opérations élémentaires sur les matrices, matrices équivalentes

a) Les opérations élémentaires sur les colonnes (transvections = ajout à une autre d'une combinaison linéaire des autres colonnes, permutations, dilatations) et sur les lignes ne modifient par le rang d'une matrice.

b) *Prop* : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

$\boxed{\text{Alors il existe } P \in GL_p(K) \text{ et } Q \in GL_n(K) \text{ telle que } QAP = J_r, \text{ avec } J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right), \text{ où } r = \operatorname{rg} A.}$

Preuve : Par la méthode du pivot, on peut par des opérations à la fois sur les lignes et les colonnes transformer la matrice A en la matrice J_r. Comme les opérations sur les lignes reviennent à multiplier A à gauche par une matrice inversible Q et que les opérations sur les colonnes reviennent à multiplier A à droite par une matrice inversible P, on a bien $QAP = J_r$.

Comme la multiplication par des matrices inversibles conservent le rang, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r$.

Autre preuve : On note $u : K^p \to K^n$ l'application linéaire associée à u. On considère des supplémentaires : $S \oplus \operatorname{Ker} u = K^p$ et $\operatorname{Im} u \oplus T = K^n$. On considère $(e_1, ..., e_r)$ une base de S, avec $\dim S = r = p - \dim \operatorname{Ker} u$.

On sait que u induit un isomorphime de S sur $\operatorname{Im} u$. Donc $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.

On complète $(e_1, ..., e_r)$ en une base adaptée à $S \oplus \operatorname{Ker} u = K^p$, et on complète $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_r))$ en une base adaptée à $\operatorname{Im} u \oplus T = K^n$.

Alors la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice J_r. En notant P et Q les matrices de passage des bases canoniques (respectives de K^p et K^n) à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, on obtient $Q^{-1}AP = J_r$.

c) *Matrices équivalentes.*

Prop : Soient A et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\boxed{\text{Les matrices } A \text{ et } B \text{ sont équivalentes : il existe } P \in GL_p(K) \text{ et } Q \in GL_n(K) \text{ telle que } Q^{-1}AP = B}$.

ii) A et B sont les matrices d'une même application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ mais dans des bases éventuellement différentes (pour la base de E et pour la base de F).

iii) $\boxed{\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B}$.

iv) $\boxed{\text{On peut passer de } A \text{ à } B \text{ par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes}}$.

Attention : Deux matrices carrées A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ qui sont semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.

$\boxed{\text{Par exemple, } I_n \text{ est équivalente à toute matrice inversible mais n'est semblable qu'à elle-même}}$.

d) *Rang de la transposée.*

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$. Alors $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}({}^tA)$.

Autrement dit, le rang des vecteurs lignes d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes.

Preuve : On a $QAP = J_r$, donc ${}^tP\ {}^tA\ {}^tQ = {}^tJ_r$, donc $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} J_r = r = \operatorname{rg} {}^tJ = \operatorname{rg} {}^tA$.

7) Rang d'une sous-matrice (HP)

a) *Rang d'une sous-matrice.*

Prop : Le rang d'une sous-matrice est inférieur ou égal au rang de la matrice.

Preuve : Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} = (A_j)_{1 \le j \le p} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Soit $B = (a_{ij})_{(i,j) \in I \times J}$ une sous-matrice de A, avec $I \subset \{1, 2, ..., n\}$ et $J \subset \{1, 2, ..., p\}$.

Posons $C = (a_{ij})_{1 \le i \le n, j \in J} = (A_j)_{j \in J}$.

Alors $\operatorname{rg} A \ge \operatorname{rg} C \ge \operatorname{rg} B$: on utilise le rang des colonnes puis le rang des lignes.

Exemple : $\operatorname{rg} \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline D & * \end{array}\right) \ge \operatorname{rg} \left(\begin{array}{c} B \\ \hline D \end{array}\right) \ge \operatorname{rg}(B)$: on utilise le rang des colonnes puis le rang des lignes.

b) *Caractérisation par le rang maximum des sous-matrices carrées inversibles.* (HP)

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ une matrice de rang r.

Alors il existe une sous-matrice carrée inversible de rang r (c'est-à-dire d'ordre r).

Ainsi, le rang d'une matrice est l'ordre maximum des sous-matrices carrées inversibles.

Preuve : Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} = (A_j)_{1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.
Par le théorème de la base incomplète, on peut extraire de $(A_j)_{1\leq j\leq p}$ une base de $\operatorname{Im} A$.
On obtient ainsi une sous-matrice $C = (A_j)_{j\in J}$ de rang r et admettant r colonnes.
On opére de même en considérant les vecteurs lignes de la matrice C (qui engendrent aussi un espace de dimension r) : on peut extraire de C une sous-matrice B de rang r. Ainsi, B est une sous-matrice carrée d'ordre r de C, donc de A, et comme $\operatorname{rg} B = r$, alors B est inversible ($\in GL_r(K)$).

Exemples d'utilisations de la notion de matrices équivalentes (HP)

Rappel de la propriété fondamentale : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$.

Alors il existe $P \in GL_p(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telle que $QAP = J_r$, avec $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où $r = \operatorname{rg} A$.

L'idée est alors de pouvoir se ramener au cas où $A = J_r$.

Exemple : (♣♣♣) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ non identiquement nulle. Alors il existe $M \in GL_n(K)$ telle que $\operatorname{tr}(AM) \neq 0$.
En effet, on sait qu'il existe $P \in GL_n(K)$ et $Q \in GL_n(K)$ telle que $A = PJ_rQ$.
On a alors $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(J_rQMP)$, et on choisit $M = Q^{-1}P^{-1}$. On obtient ainsi $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(J_rI_n) = \operatorname{tr}(J_r) = r > 0$.

Exemple : (♣♣♣) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Il existe B matrice de projection et M matrice inversible telles que $A = BM$.

En effet, on sait qu'il existe $P \in GL_n(K)$, $Q \in GL_n(K)$ et $r \in \{0, 1, ..., n\}$ tels que $A = PJ_rQ$.

Donc $A = (PJ_rP^{-1})(PQ) = BM$, avec $\begin{cases} B = PJ_rP^{-1} \text{ semblable à } J_r\text{, donc } B \text{ est une matrice de projection} \\ M = PQ \text{ inversible (produit de matrices inversibles)} \end{cases}$