Racines n-ième d'un nombre complexe

Avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$, l'ensemble des racines n-ième de l'unité est $\boxed{U_n = \{\omega^k,\ 0 \leq k \leq n-1\}}$.

1) Obtention des racines n-ième d'un nombre complexe (sous forme trigonométrique)

Principe : Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = c$, où $c = \rho e^{i\theta} \neq 0$, on se ramène au cas $c = 1$ (cas "homogène").

En effet, le nombre complexe $\boxed{z_0 = \rho^{1/n} e^{i\theta/n} \text{ est une racine particulière de } \rho e^{i\theta}}$.

On en déduit que : $z^n = c \Leftrightarrow z^n = (z_0)^n \Leftrightarrow \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z}{z_0} \in U_n$.

IMPORTANT : $\boxed{\text{Les racines } n\text{-ième de } c \text{ sont donc les produits } z_0\omega^k, \text{ avec } 0 \leq k \leq n-1}$.

Remarque : Géométriquement, les racines forment un polygone (image de U_n par la similitude $z \longmapsto z_0 z$).

Exemple : (♣♣♣) Résolution de $z^6 = -1$.

On a $-1 = e^{i\pi}$, donc les solutions sont les $e^{i\pi/6}\omega^k$, avec $\omega = e^{2i\pi/6}$ et $0 \leq k \leq 5$.

Donc les racines 6-ième de -1 sont les $e^{i\theta}$, avec $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, et $0 \leq k \leq 5$.

Exemple : (♣♣♣) Résolution de $z^4 = -4$.

On a $-4 = 4e^{i\pi}$, donc les les solutions sont les $\sqrt{2}e^{i\pi/4}i^k$, c'est-à-dire $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ et $1-i$.

2) Complément : Calculs des racines carrées d'un nombre complexe donné en coordonnées cartésiennes

Principe : Les deux racines carrées de $c \in \mathbb{C}^*$ sont opposées.

Pour résoudre $z^2 = a + ib$, on pose $z = \rho e^{i\theta}$, d'où la CNS : $\rho^2 \cos(2\theta) = a$ et $\rho^2 \sin(2\theta) = a$.

On a nécessairement $\boxed{\rho^2 = \sqrt{a^2 + b^2}}$. La relation $\cos(2\theta) = \frac{a}{\rho^2}$ permet de calculer $(\cos\theta)^2$ et $(\sin\theta)^2$.

Il y a à ce stade 4 candidats, et on détermine les deux racines en considérant le signe de $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

Exemple : (♣) On résout $z^2 = 3 + 4i$. On a $\rho^2 = \sqrt{25} = 5$, $(\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta)) = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$.

Donc $(\sin\theta)^2 = \frac{3}{5}$, et comme $\sin(2\theta) > 0$, $(\cos\theta, \sin\theta) = \pm(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Les racines sont $u = \frac{4}{\sqrt{5}} + i\frac{3}{\sqrt{5}}$ et $-u$.

Attention : Ne jamais utiliser le symbole $\sqrt{\ }$ dans $\mathbb{C}$.

Décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme réel ou complexe

1) Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

a) Théorème de D'Alembert-Gauss (*admis*) : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant admet une racine.

Corollaires : i) $\boxed{\text{Tout polynôme de } \mathbb{C}[X] \text{ est scindé}}$. ii) Les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Pratique de la factorisation dans $\mathbb{C}$: on recherche les racines en résolvant l'équation $P(z) = 0$.

Si on en trouve $n = \deg(P)$, alors P est scindé à racines simples. Sinon, on étudie leur multiplicité.

Remarque : Pour les polynômes de degré ≥ 5, il n'existe pas de formule générale exprimant les racines en fonction des coefficients (théorie de Galois).

b) Exemple fondamental

Le polynôme $X^n - 1$ admet comme racines complexes les n racines de l'unité.

Ce sont donc les seules racines de $X^n - 1$, et elles sont simples. De plus, $X^n - 1$ est unitaire (coefficient dominant 1).

Donc $\boxed{X^n - 1 = \prod_{z \in U_n}(X - z) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k), \text{ où } \omega = e^{2i\pi/n}}$

Remarque : En particulier, pour $n \geq 2$, le coefficient en X^{n-1} est nul , donc la somme des racines est nulle.

Plus généralement, on a $\boxed{X^n - z_0^n = \prod_{k=0}^{n-1}(X - z_0\omega^k)}$.

Exemple : (♣♣♣) $1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} = \dfrac{X^n - 1}{X - 1} = \prod_{k=1}^{n-1}(X - \omega^k)$, où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

En particulier, $\boxed{X^2 + X + 1 = \frac{X^3-1}{X-1} = (X - j)(X - j^2)}$, où $j = e^{2i\pi/3}$ et noter que j^2 est le conjugué de j.

Exemple : (♣♣♣) $\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{n}{2^{n-1}}}$.

En effet, comme $\sin(\frac{k\pi}{n}) \geq 0$, alors $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\left|1 - e^{2ik\pi/n}\right| = \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - \omega^k\right|$.

Or, $\prod_{k=1}^{n-1}\left|1 - \omega^k\right| = |P(1)|$, où $P = \frac{X^n-1}{X-1} = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$. Donc $P(1) = n$.

Remarque : On pourrait effectuer le calcul sans module : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \prod_{k=1}^{n-1}(2i)e^{-ik\pi/n}(e^{2ik\pi/n} - 1) = ...$

Exemple : (♣♣) On a $X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1 = \prod_{k \in \{-5,-4,-2,-1,0,1,3,4\}}(X - e^{i(2k+1)\pi/10})$.

$X^8 - X^6 + X^4 - X^2 + 1 = \frac{X^{10}+1}{X^2+1}$ sont les racines 10-ième de -1 auxquelles on retranche i et $-i$ (racines de $X^2 + 1$).

Exemple : (♣♣) $X^m - 1$ divise $X^n - 1$ ssi $U_m \subset U_n$ donc ssi $e^{2i\pi/m} \in U_n$, c'est-à-dire m divise n.

Dans ce cas, avec $n = mq$, on a $X^n - 1 = (X^m)^q - 1 = (X^m - 1)\sum_{k=0}^{q-1}(X^m)^k$, car $Y^q - 1 = (Y - 1)\sum_{k=0}^{q-1} Y^k$.

2) Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

a) Polynôme conjugué

Principe : Pour $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, le polynôme conjugué est $\overline{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$.

Alors les racines de $\overline{P}$ sont les conjugués des racines de P, avec les mêmes ordres de multiplicité.

Plus précisement, si $P(X) = \lambda \prod_{k=1}^{m}(X - z_k)^{m_k}$, alors $\overline{P}(X) = \overline{\lambda} \prod_{k=1}^{m}(X - \overline{z_k})^{m_k}$.

Conséquence : $\boxed{\text{Si } P \text{ est à coefficients réels, les racines de } P \text{ sont deux à deux conjuguées}}$.

Remarque : On a une propriété analogue avec les polynômes pairs.

Avec $Q(X) = P(-X)$, les racines de Q sont les opposés des racines de P.

Donc si P est pair, c'est-à-dire $P(X) = P(-X)$, les racines de P sont deux à deux opposées.

b) Cas particulier fondamental

Un polynôme réel $(X^2 + aX + b)$ est irréductible ssi il est sans racine, c'est-à-dire ssi $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Si β est un nombre complexe, le polynôme $\boxed{(X - \beta)(X - \overline{\beta}) = X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta)X + |\beta|^2}$ est à coefficients réels.

Si β est complexe non réel, le polynôme $X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta)X + |\beta|^2$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

IMPORTANT (cas fréquent) : $(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2(\cos\theta)X + 1$.

c) Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ en produit de polynômes irréductibles

Principe : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On détermine d'abord les racines complexes de P (et la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$). On obtient la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ en regroupant les facteurs associés à des racines (non réelles) conjuguées.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Les racines de P dans $\mathbb{C}[X]$ sont d'une part les racines réelles $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{R}$ et d'autre part les racines complexes non réelles deux à deux conjuguées $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s, \overline{\beta_1}, \overline{\beta_2}, ..., \overline{\beta_s}$ (avec $\mathrm{Im}\,\beta_i > 0$ par exemple).

On a $P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^s [(X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j})]$, d'où $\boxed{P = \lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i) \prod_{j=1}^s \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta_j)X + |\beta_j|^2\right)}$

On obtient la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

IMPORTANT : Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont donc

- d'une part les polynômes de degré 1

- d'autre part les polynômes de degré 2 de discriminant < 0.

Remarque : Le nombre de racines réelles (comptées avec multiplicité) a même parité que $n = \deg P$. En particulier, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle.

IMPORTANT : $\boxed{\text{Ne pas confondre irréductible et sans racine}}$: $X^4 + 1$ n'admet pas de racine mais n'est pas irréductible.

D'ailleurs, tout polynôme irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ est de degré ≤ 2.

En effet, on a $X^4 + 1 = (X - e^{i\pi/4})(X - e^{-i\pi/4})(X - e^{3i\pi/4})(X - e^{-3i\pi/4}) = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

D'autre part, tout polynôme de degré 1 est irréductible et admet une racine !

Exemple : (♣♣♣) Factorisation de $X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Dans $\mathbb{C}$, les racines de $X^6 + 1$ sont $e^{i\pi/6}$, i et $e^{5i\pi/6}$ et leurs conjuguées.

Donc dans $\mathbb{R}[X]$, $X^6 + 1 = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$, car $2\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$ et $2\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\sqrt{3}$.

Exemple : (♣♣♣) Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $n = 2m$ est pair, $X^n - 1 = (X - 1)(X + 1) \prod_{k=1}^{m-1} \left(X^2 - 2(\cos\frac{2k\pi}{n})X + 1\right)$.

Si $n = 2m + 1$ impair, $X^n - 1 = (X - 1) \prod_{k=1}^{m} \left(X^2 - 2(\cos\frac{2k\pi}{n})X + 1\right)$.

Exemple : (♣♣) Les polynômes réels à valeurs strictement positives sont exactement les polynômes de la forme $P = \lambda \prod_{j=1}^s \left(X^2 + a_j X + b_j\right)^{n_j}$, où $\lambda > 0$ et où les polynômes $X^2 + a_j X + b_j$ sont irréductibles.

Les polynômes réels non nuls à valeurs positives sont les $\lambda \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{2m_i} \prod_{j=1}^s \left(X^2 + a_j X + b_j\right)^{n_j}$, avec $\lambda > 0$.