Applications linéaires

1) Applications linéaires

Def : Soient E et F deux K-espaces vectoriels.

On dit que u est linéaire ssi $\forall (x,y) \in E^2$, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.

Def équivalente : $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ et $u(x+y) = u(x) + u(y)$.

Remarque : On a a fortiori $u(0) = 0$.

Important : Ainsi, $u(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i)$.

Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire par une application linéaire est la combinaison linéaire des images.

Exemples :

$u : K[X] \to K[X] \quad P \longmapsto XP'$.

$\varphi : C^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad f \longmapsto \int_a^b f(t)\ dt$.

Remarque : L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires $u : E \to F$ est un K-espace vectoriel.

2) Image et image réciproque d'un sev, noyau et image

a) *Image et image réciproque d'un sev.*

Prop : Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E' sev de E et F' sev de F, alors $u(E)$ sev de F et $u^{-1}(F')$ sev de E.

b) *Noyau et image.*

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On considère $\operatorname{Ker} u = \{x \in E \mid u(x) = 0\}$ et $\operatorname{Im} u = u(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = u(x)\}$.

Alors $\operatorname{Ker} u$ est un sev de E et $\operatorname{Im} u$ est un sev de F.

Remarque : $\operatorname{Im} u = \{u(x),\ x \in E\}$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} u$ est l'ensemble des $u(x)$ lorsque x décrit E.

c) *Caractérisation des applications surjectives.*

L'application u est surjective ssi $\operatorname{Im} u = F$.

d) *Caractérisation des applications linéaires injectives.*

Propriété fondamentale : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\boxed{u(x) = u(y) \text{ ssi } x - y \in \operatorname{Ker} u}$.

Prop : u est injective ssi $\operatorname{Ker} u = \{0\}$.

e) *Equation linéaire*

Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $b \in F$. Considérons S l'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = b$.

S est non vide ssi $b \in \operatorname{Im} u$.

Dans ce cas, si $x_0 \in S$ est une solution particulière, alors $S = x_0 + \operatorname{Ker} u = \{x_0 + z,\ z \in \operatorname{Ker} u\}$.

Exemple : Les solutions de $(E) : y'' + ay' + by = g(t)$ s'obteniennent en ajoutant à une solution particulière la solution générale de $(H) : y'' + ay' + by = 0$. Ici, u est l'application linéaire $y \longmapsto y'' + ay' + by$.

3) Théorème fondamental de l'algèbre linéaire

a) *Th* : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, c'est-à-dire $S \oplus \operatorname{Ker} u = E$.

Alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$.

Autrement dit, l'application $v : S \to \operatorname{Im} u \quad x \longmapsto u(x)$ est un isomorphisme (= application linéaire bijective).

Preuve : v est bien définie et linéaire (comme restriction de u).

v est injective : Si $x \in \operatorname{Ker} v$, alors $x \in S$ et $u(x) = 0$, donc $x \in S \cap \operatorname{Ker} u = \{0\}$, c'est-à-dire $x = 0$.

v est surjective : Soit $y \in \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $u(x) = y$.

Comme $E = S \oplus \operatorname{Ker} u$, alors il existe $(x', z) \in S \times \operatorname{Ker} u$ tel que $x = x' + z$.

Donc $y = u(x) = u(x') + u(z) = u(x')$, donc $y = u(x')$, car $x' \in S$. Donc v est surjective.

b) *Corollaire* (*théorème du rang*) : Supposons E et F de dimension finie. Alors $\operatorname{rg} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$.

Preuve : On a $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$, et par a), on a $\dim(\operatorname{Im} u) = \dim S = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$.

4) Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base (ici en dimension finie)

a) *Prop* : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E.

Une application linéaire $u : E \to F$ est entièrement déterminée par $(u(e_1), ..., u(e_n))$, notée souvent $u(\mathcal{B})$.

Autrement dit, pour toute famille $(y_1, ..., y_n) \in F^n$, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que

$$\forall j \in \{1, 2, ..., n\},\ u(e_j) = y_j$$

Remarque : Cette propriété fondamentale conduit au codage des applications linéaires par des matrices.

En effet, soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (f_1, ..., f_p)$ une base de F.

Alors u est entièrement déterminée par les $n \times p$ coordonnées des $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{C}$.

b) *Caractérisation des isomorphismes.*

Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $u : E \to F$ linéaire. Alors :

- u est injective ssi $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est libre.

- $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_1), ..., u(e_n))$. En particulier, u est surjective ssi $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est génératrice dans F.

- u est bijective ssi $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base de F.

c) *Détermination d'une application linéaire par les restrictions à des sev supplémentaires.*

Prop : On suppose $E = E_1 \oplus E_2$. Soient $u_1 : E_1 \to F$ et $u_2 : E_2 \to F$ deux applications linéaires.

Il existe une unique linéaire $u : E \to F$ telle que $\begin{cases} \text{la restriction de } u \text{ à } E_1 \text{ est } u_1 \\ \text{la restriction de } u \text{ à } E_2 \text{ est } u_2 \end{cases}$

Remarque : Cette application linéaire est définie par $u(x) = u_1(x_1) + u_2(x_2)$, où $x = x_1 + x_2 \in E_1 \oplus E_2 = E$.

Exemple : Supposons $E = F \oplus G$.

La projection p sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme $u : E \to E$ telle que

$$\forall x \in F,\ u(x) = x \text{ et } \forall x \in G,\ u(x) = 0$$

5) Anneau des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$ et groupe linéaire $GL(E)$

a) *Composée d'applications linéaires.*

Une composée d'applications linéaires est linéaire : Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,g)$, alors $u \circ v : E \to G$ est linéaire.

b) *Anneau des endomorphismes.*

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, c'est-à-dire des applications linéaires de E dans E.

Alors $\mathcal{L}(E)$ muni des lois $+$ et $\circ$ (et de la loi externe .), est un anneau.

On a en particulier la propriété de distributivité, c'est-à-dire $\begin{cases} u \circ (v+\omega) = u \circ v + u \circ w \\ (v+\omega) \circ u = v \circ u + w \circ u \end{cases}$

L'élément neutre pour $\circ$ est l'application identité $\mathrm{Id} : E \to E \quad x \longmapsto x$.

Notation : On note $u^k = u \circ u \circ ... \circ u$ (k fois). En particulier, $u^0 = \mathrm{Id}$.

Attention : L'anneau $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif (pour $\dim E \geq 2$). Il existe u et v tels que $u \circ v \neq v \circ u$.

Remarque : Si u et v commutent, c'est-à-dire si $u \circ v = v \circ u$, alors la formule du binôme est vérifiée.
En particulier, on a $(u + \lambda\,\mathrm{Id})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^{n-k} u^k$.

c) *Groupe linéaire $GL(E)$.*

On note $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes bijectifs (= isomorphismes).

Remarque : Ce sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$: u est bijective ssi $\exists\, v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}$.

Alors $GL(E)$ muni de $\circ$ est un groupe (loi associative, élément neutre, et tout élément admet un inverse).

En particulier :

- La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme : Si $u \in GL(E)$, alors u^{-1} est aussi linéaire bijective.
- La composée d'isomorphismes est un isomorphisme.

Si u et v sont des applications linéaires bijectives, alors $u \circ v$ est bijective, et $(u \circ v)^{-1} = v^{-1} \circ u^{-1}$.
Plus généralement, si $u_1, ..., u_r$ sont bijectives, alors $(u_1 u_2 ... u_r)^{-1} = u_r^{-1} ... u_2^{-1} u_1^{-1}$.

6) Formes linéaires et hyperplans

a) *Formes linéaires*

Def : Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application linéaire φ de E dans K.

Remarque : L'image de φ est un sev de K, donc est $\{0\}$ ou K.
En particulier, si φ n'est pas identiquement nulle, alors $\varphi(E) = K$.

Remarque : On note $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ le K-espace vectoriel des formes linéaires, appelé dual de E.

Exemple : Si $E = K[X]$, l'application $\varphi : E \to K \quad P \longmapsto P(1) + P'(0)$ est une forme linéaire.

Exemple : Si $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ et $\omega \in E$, l'application $\varphi : E \to \mathbb{R} \quad f \longmapsto \int_a^b f(t)\omega(t)\,dt$ est linéaire.

b) *Formes linéaires dans un espace E muni d'un produit scalaire*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.
Alors, pour tout $a \in E$, l'application $\varphi : E \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \langle a, x \rangle$ est une forme linéaire.

Remarque : En dimension finie (c'est-à-dire E euclidien), on obtient ainsi toutes les formes linéaires : Autrement dit, toute forme linéaire φ sur un espace euclidien s'écrit (de façon unique) sous la forme $x \longmapsto \langle a, x \rangle$, où $a \in E$.

Exemple : Les hyperplans de $E=\mathbb{R}^3$ sont les $H : ax+by+cz=0$, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$.

Plus généralement, les hyperplans de $E=\mathbb{R}^n$ sont les $H : a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n=0$, avec les a_i non tous nuls.

c) *Hyperplans*

Prop : Soit H un sev de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle : il existe $\varphi\in\mathcal{L}(E,K)$ non nulle telle que $H=\operatorname{Ker}\varphi$

ii) Il existe une droite vectorielle D supplémentaire de H, c'est-à-dire telle que $D\oplus H=E$

iii) $\dim H=n-1$ (en supposant ici E de dimension finie n).

Preuve :

i) implique ii) : Considérons $\varphi\in\mathcal{L}(E,K)$ non nulle telle que $H=\operatorname{Ker}\varphi$.

Comme φ n'est pas (identiquement) nulle, il existe $x_0\in E$ tel que $\varphi(x_0)\neq 0$.

Montrons que la droite $D=Kx_0$ est un supplémentaire de H dans E.

Supposons $x\in D\cap H$. Alors $x=\lambda x_0$, donc $\varphi(x)=\lambda\varphi(x_0)=0$ (car $x\in H$), donc $\lambda=0$. Donc $x=0$.

On en déduit que $D\cap H=\{0\}$, c'est-à-dire D et H en somme directe.

Soit $y\in E$. On cherche $x=\lambda x_0\in D$ et $z\in H$ tel que $y=\lambda x_0+z$. On a nécessairement $\varphi(y)=\lambda\varphi(x_0)$.
Ainsi, en prenant $\lambda=\dfrac{\varphi(y)}{\varphi(x_0)}$ et en posant $z=x-\lambda x_0$, on a bien $\varphi(z)=0$, c'est-à-dire $z\in H$. Donc $D+H=E$.

ii) implique i) Supposons $D\oplus H=E$, avec $D=Kx_0$. On considère $\varphi(x)=\lambda$, où $x=\lambda x_0+z\in D\oplus H$.

On vérifie aisément que $\varphi : E\to K$ est linéaire. D'autre part, $x\in\operatorname{Ker}\varphi$ ssi $\lambda=0$, donc ssi $x\in H$.

iii) équivaut à i) et ii) : Résulte du théorème du rang appliqué à $\varphi : E\to K$, puisque $\operatorname{rg}\varphi=1$ (φ non nulle).

d) *Equations d'un hyperplan.*

Prop : Soient φ et ψ deux formes linéaires sur E. Alors $\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\psi$ ssi il existe $\lambda\in K^*$ tel que $\psi=\lambda\varphi$.

Preuve : Le sens réciproque est immédiat.

Supposons $\operatorname{Ker}\varphi=\operatorname{Ker}\psi$. On peut supposer φ et ψ non identiquement nulles. Considérons x_0 tel que $\varphi(x_0)\neq 0$.
Alors $\psi(x_0)\neq 0$. Posons $\lambda=\dfrac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}$. Posons $f(x)=\psi(x)-\lambda\varphi(x)$. On a $f(x_0)=0$.

Or, on a aussi $f(z)=0$ pour tout $z\in H$, car $\varphi(z)=\psi(z)=0$

Ainsi, f est nulle sur H et sur la droite $D=Kx_0$, donc sur $E=D+H$. On en déduit que f est nulle. Donc $\psi=\lambda\varphi$.

Corollaire : Tout hyperplan ademt une équation unique, à proportionnalité près.