Propriétés fondamentales des fonctions continues sur un intervalle

1) Caractérisation séquentielle (i.e. par les suites) de la continuité

a) *Prop* : f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers a, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n = f(a)$.

Remarque : Le sens direct, qui est le plus utilisé, est une conséquence directe de la composition des limites.

b) *Exemple* : Si $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f : I \to \mathbb{R}$ continue, et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$, alors $f(l) = l$.

c) *Exemple* : La fonction $f : x \longmapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0^+.

En effet, avec $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$, on a $x_n \to 0^+$ et $y_n \to 0^+$, et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Prop : Si f est continue sur $[a, b]$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f.

Corollaire : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple : Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ est continue, f admet un point fixe (car $g = f - \mathrm{Id}$ change de signe sur $[0, 1]$).

Remarque : De façon générale, le TVI sert à la localisation des zéros.

3) Théorème de Weierstrass

Prop : Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, f est bornée et il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \sup f$.

Corollaire (avec le TVI) : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Exemple : Toute fonction convergente en $+\infty$ et continue sur $[0, +\infty[$ est bornée.

Exemple : Toute fonction de classe C^1 est lispchiztienne.

4) Fonctions continues et bijectives sur un intervalle : théorème de la bijection

a) *Théorème de la limite monotone* : Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ croissante, alors $\lim_{b^-} f$ existe et vaut $\sup_{[a,b[} f$.

b) *Prop* : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$ et la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est elle aussi continue.

Corollaire utile : Si $I = [a, b[$ est continue et strictement croissante, f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), \lim_b f[$.

Exemple : $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue comme réciproque de $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

Exemple : L'application $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ $x \longmapsto x + x^3$ est bijective et continue, donc $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

5) Sommes de Riemann

Pour une subdivision régulière : $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$, où $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$.

En particulier, si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ est continue (par morceaux), $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)\ dt$.

Cas général : $\int_a^b f = \lim_{\Delta\to0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})f(x_k)$, avec $\Delta = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ pas de la subdivision de $[a, b]$.

6) Formule de la moyenne

Prop : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et g positive. La moyenne des $f(t)$ pondérés par $g(t)$ est $m = \dfrac{\int_a^b f(t)g(t)\ dt}{\int_a^b g(t)\ dt}$.

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $m = f(c)$. En effet, par somamtion des inégalités, on a $\inf f \leq m \leq \sup f$.

Remarque : On retrouve le théorème des accroissements finis : il existe c tel que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f'(t)\ dt = f'(c)$.

$\boxed{\textbf{Théorème fondamental du calcul différentiel et utilisations}}$

Théorème fondamental du calcul différentiel

Lemme : Soit f continue et $a \in I$. Alors $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Prop : Soit f de classe C^1 et $a \in I$. Alors $\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt}$, c'est-à-dire $[f(t)]_a^x = \int_a^x f'(t)\, dt$.

Utilisations du théorème fondamental du calcul différentiel

a) *Condition de convergence*

Important : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^1.

$\boxed{\text{Alors } f \text{ converge en } b \text{ ssi l'intégrale } \int_a^x f'(t)\, dt \text{ converge lorsque } x \text{ tend vers } b}$.

Extension de la formule au cas d'une fonction continue sur $[a, b]$ et de classe C^1 sur $]a, b[$:

$\boxed{\text{Si } f \text{ est continue sur } [a,b] \text{ et de classe } C^1 \text{ sur }]a,b[. \text{ Alors } f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt}$.

Preuve : Pour $a < x \leq y < b$, on a $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\, dt$, et on fait tendre x vers a et y vers b (l'intégrale cv).

b) *Intégration par parties*

Si u et v de classe C^1, $[uv]_a^b = \int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$. D'où :

Prop : Si f continue et g de classe C^1 sur $[a, b]$, alors $\boxed{\int_a^b f(t)g(t)dt = [F(t)g(t)]_a^b - \int_a^b F(t)g'(t)dt}$.

c) *Formule de Taylor avec reste intégral*

Prop : Soit f de classe C^{n+1} sur $[a, x]$. Alors $\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a)\dfrac{(x-a)^k}{k!} + \int_a^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt}$.

Remarque : Pour $n = 0$, il s'agit de la formule $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$.

Idée : On intègre $\int_a^x f'(t)\, dt$ par parties de sorte que les termes entre crochets s'annulent en x.
Autrement dit, on dérive f' et on intègre 1 en des primitives successives de la forme $\frac{1}{k!}(t-x)^k$.

d) *Intégrale à bornes variables*

Prop : Si u et $v : J \to I$ sont de classe C^1, et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, alors $\boxed{G : x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt \text{ est } C^1}$.

Preuve : $G(x) = F(v(x)) - F(u(x))$, et $G'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.

Corollaire : $\boxed{\text{Si } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue et } T\text{-périodique, alors } \int_x^{x+T} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, dt}$.

Preuve : $\varphi : x \longmapsto \int_x^{x+T} f(t)\, dt$ vérifie $\varphi'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$, donc φ est constante sur $\mathbb{R}$.

e) *Théorème des accroissements finis*

Soit f continue sur $[a, b]$ et C^1 sur $]a, b[$. On a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\, dt$, donc $|f(b) - f(a)| \leq (b-a) \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

Remarque : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\, dt$: La pente de f entre a et b est la valeur moyenne de la dérivée.

La pente $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est comprise entre $\inf f'$ et $\sup f'$, donc par le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

f) *Théorème du prolongement C^1 (dit du taupin sérieux)*

Théorème : Si f continue sur $[a, b]$, de classe C^1 sur $]a, b]$ et s'il existe $L = \lim_{x\to a, x>a} f'(x)$, alors $\boxed{f'(a) \text{ existe et vaut } L}$.
Ainsi, f est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$.

Preuve : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$ avec $c_x \in [a, x]$, et $\lim_{x\to a} f'(c_x) = L$, donc $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

Extension au prolongement C^∞ : si f est classe C^∞ sur $]a, b]$ et si $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $\lambda_n = \lim_{x\to a, x>a} f^{(n)}(x)$, alors f admet un prolongement de classe C^∞ en a.