$\boxed{\textbf{Exemples de suites récurrentes linéaires}}$

0) Solutions d'équations linéaires

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire et $b \in F$.

- Equation linéaire homogène : $u(x) = 0$. L'ensemble des solutions est le sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker} u$.

- Equation linéaire (avec second membre) : $u(x) = b$.

On suppose qu'il existe au moins une solution x_0. On a alors $u(x) = b \Leftrightarrow u(x) = u(x_0) \Leftrightarrow u(x - x_0) = 0$.

L'ensemble des solutions est l'ensemble $\boxed{x_0 + \operatorname{Ker} u} = \{x_0 + z,\ z \in \operatorname{Ker} u\}$. On obtient la solution générale en ajoutant à une solution particulière la solution générale de l'équation homogène.

1) Analogie entre suites récurrentes linéaires et équations différentielles linéaires

suites récurrentes linéaires	équations différentielles linéaires
$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$	$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0$
$x_{n+1} - \lambda x_n = f(n)$	$y'(t) - ay(t) = f(t)$

2) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 homogènes à coefficients constants (= de type Fibonacci)

a) $\boxed{\text{On note } S \text{ l'ensemble des suites } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0}$.

- On note $u : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'application linéaire définie par $u : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc $S = \operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

- L'application $u : S \to \mathbb{C}^2 \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_0, x_1)$ est linéaire et bijective. Donc $\dim S = 2$.

- La suite géométrique $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à S ssi $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

- Supposons que l'équation caractéristique $z^2 + az + b = 0$ admet deux racines distinctes λ et μ.
Les suites $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent ainsi à S.
Comme elles sont linéairement indépendantes et que $\dim S = 2$, alors $S = \operatorname{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}})$, c'est-à-dire

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S \text{ ssi il existe } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \text{ tels que } \forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n$$

Remarque : On détermine (α, β) en résolvant le système linéaire $\begin{cases} x_0 = \alpha + \beta \\ x_1 = \alpha\lambda + \beta\mu \end{cases}$

Remarque : Si l'équation caractéristique $z^2 + az + b = 0$ admet une racine double λ, on vérifie que les suites $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à S. Si $\lambda \neq 0$, on a donc : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ ssi $x_n = (\alpha + \beta n)\lambda^n$.

b) *Exemple* : Considérons une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+2} - ax_{n+1} + x_n = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$.

L'équation caractéristique est $z^2 - az + 1 = 0$ de racines λ et μ.

- Si $|a| < 2$, les racines sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, donc $x_n = \alpha e^{in\theta} + \beta e^{-in\theta}$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par $|\alpha| + |\beta|$).

- Si $|a| > 2$, les racines (réelles) sont λ et $\mu = \lambda^{-1}$, avec $|\lambda| > 1$, donc $x_n = \alpha\lambda^n + \beta\lambda^{-n}$.
En particulier, si $\alpha \neq 0$ (c'est-à-dire si $x_1 \neq \mu x_0$), alors $x_n \sim \alpha\lambda^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- Si $a = 2$, 1 est racine double, donc $x_n = \alpha + \beta n$. Si $a = -2$, 1 est racine double, donc $x_n = (\alpha + \beta n)(-1)^n$.

3) Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 à coefficient constant avec second membre

$\boxed{\text{On note } S \text{ l'ensemble des suites } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ vérifiant } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} - \lambda x_n = f(n)}$

a) $\boxed{\text{Lorsque } \lambda = 1}$, l'équation s'écrit $x_{n+1} - x_n = f(n)$, ce qui équivaut (cf séries) à : $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$.

Remarque : L'analogue différentiel est l'équation $y'(t) = f(t)$, de solution $y(t) = y(0) + \int_0^t f(s)\, ds$.

$\boxed{\text{On suppose désormais } \lambda \neq 1}$

b) *Résolution de l'équation homogène associée*

On note S_H l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\boxed{\text{l'équation homogène } \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \lambda x_n}$.
Donc S_H est l'ensemble des suites géométriques de raison λ, c'est-à-dire $\boxed{x_n = \alpha\lambda^n}$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

c) *Cas particuliers pour lesquels une solution particulière est de même forme que le second membre.*

- Cas où $f(n) = P(n)$, où $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme.

Il existe un polynôme $Q(X)$ de même degré que $P(X)$ tel $Q(X+1) - \lambda Q(X) = P(X)$.
En effet, l'application $u : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]\ \ Q(X) \longmapsto Q(X+1) - \lambda Q(X)$ est linéaire injective, donc bijective.

Ainsi, on a $Q(n+1) - \lambda Q(n) = P(n)$.
Autrement dit, les suites appartenant à S sont les suites $x_n = Q(n) + \alpha\lambda^n$, avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Cas où $f(n) = r^n$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.
On vérifie que $x_n = \dfrac{1}{r-\lambda} r^n$ appartient à S (si $r = \lambda$, on considère $x_n = n\lambda^{n-1}$).

d) *Cas général* (*complément culturel*) : *Méthode de variation de la constante.*

On effectue le changement de variable $x_n = y_n\lambda^n$ (en fait varier la constante dans $x_n = \alpha\lambda^n$).
L'équation s'écrit : $y_{n+1}\lambda^{n+1} - y_n\lambda^{n+1} = f(n)$, c'est-à-dire $y_{n+1} - y_n = \lambda^{-n} f(n)$. On s'est donc ramené au cas a).

e) *Exemple* : Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1} - 2x_n = n$.

On cherche une solution particulière polynomiale de degré 1. On obtient $(-n-1)_{n\in\mathbb{N}}$.
Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dela forme $x_n = \alpha 2^n - (n+1)$, donc $x_n = (x_0+1)2^n - (n+1)$.

4) Cas particulier à connaître : Suites définies par $x_{n+1} = ax_n + b$

a) Les x_n sont les images successives de x_0 par l'application $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ \ z \longmapsto az + b$

- Si $a = 1$, les solutions sont les $x_n = x_0 + nb$.
- Si $a \neq 1$, l'application $F :\ z \longmapsto az + b$ admet un point fixe $c = \dfrac{b}{1-a}$.

Ainsi, on a $ac + b = c$, donc la suite constante $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution.
Les solutions sont donc les $c + \alpha a^n$, avec $\alpha = x_0 - c$. Donc $x_n = x_0 + a^n(x_0 - c)$.

b) *Interprétation géométrique conseillée*

On effectue un changement d'origine (en prenant c comme nouvelle origine) pour se ramener au cas $b = 0$.

En effet, on a $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + b \\ c = ac + b \end{cases}$, donc $\boxed{(x_{n+1} - c) = a(x_n - c)}$, d'où $\boxed{(x_n - c) = a^n(x_0 - c)}$.

c) *Exemple* : Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + 1$.

Le point fixe de $F : z \longmapsto \dfrac{1}{2}z + 1$ est $c = 2$. Donc $x_n - 2 = \dfrac{1}{2^n}(x_0 - 2)$, et en particulier $\lim_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Remarque : De façon générale, Lorsque $|a| < 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le point fixe c.

d) *Analogue multiplicatif* : Considérons la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_{n+1} = k(x_n)^2$, avec $x_0 > 0$ et $k > 0$.

Remarque : On pourrait se ramener au cas précédent en passant au logarithme : $\ln x_{n+1} = 2(\ln x_n) + (\ln k)$.

Une résolution directe consiste à effectuer un changement de variable pour se ramener au cas où $k = 1$.
Cette transformation correspond au changement d'origine évoqué au b).
En effet, la relation $x_{n+1} = k(x_n)^2$ s'écrit aussi sous la forme $kx_{n+1} = (kx_n)^2$.
Autrement dit, en posant $y_n = kx_n$, on se ramène à $y_{n+1} = (y_n)^2$, d'où $y_n = (y_0)^{(2^n)}$. Ainsi, $x_n = k^{-1}(kx_0)^{(2^n)}$.