

1) Prop : Il existe un unique polynôme réel T_n vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$

Preuve de l'unicité

Supposons que T_n et T_n^* conviennent. Alors $(T_n - T_n^*)(\cos \theta) = 0$.

Lorsque θ décrit $\mathbb{R}$, $\cos \theta$ décrit $[-1, 1]$, donc tout réel $x \in [-1, 1]$ est racine de $T_n - T_n^*$.

Comme $[-1, 1]$ est infini, alors $T_n - T_n^*$ est nul, c'est-à-dire $T_n = T_n^*$.

Remarque : Deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux.

a) Première preuve de l'existence (par récurrence d'ordre 2)

On a $\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta)$.

En effet, on applique $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$ avec $a = n\theta$ et $b = \theta$.

On en déduit par récurrence d'ordre 2 que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\boxed{T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}}$$

vérifie bien $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Exemple : On a $T_2 = 2X^2 - 1$, qui correspond à la formule bien connue $\cos(2\theta) = 2(\cos \theta)^2 - 1$.

b) Seconde preuve de l'existence (par une formule explicite)

On a $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((\cos \theta + i \sin \theta)^n)$.

Or, $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k (\sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k}$.

La partie réelle s'obtient en considérant les termes pairs : $\cos(n\theta) = \sum_{k \text{ pair}, 0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} i^k (\sin \theta)^k (\cos \theta)^{n-k}$.

En effet le changement de variables $k = 2j$, avec $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, on obtient :

$$\cos(n\theta) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j (\sin \theta)^{2j} (\cos \theta)^{n-2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j (1 - (\cos \theta)^2)^j (\cos \theta)^{n-2j}.$$

On en déduit que le polynôme suivant convient :

$$T_n = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j (1 - X^2)^j X^{n-2j} = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (X^2 - 1)^j X^{n-2j}$$

c) Prop : Le polynôme T_n est de degré n , et son coefficient dominant λ_n vaut 2^{n-1} si $n \in \mathbb{N}^*$.

Première preuve : On raisonne par récurrence d'ordre 2 à l'aide de la formule de récurrence.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour T_n et T_{n-1} .

On a $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. Comme $\deg(XT_n) > \deg(T_{n-1})$, alors $\deg(T_{n+1}) = \deg(2XT_n) = 1 + \deg(T_n) = n + 1$.

D'autre part, on a $\lambda_{n+1} = 2\lambda_n$ (car le coefficient dominant de T_{n+1} est celui de $2XT_n$). D'où le résultat.

Seconde preuve : On utilise la formule explicite. Pour $0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $(X^2 - 1)^j X^{n-2j}$ est unitaire de degré n .

Donc T_n est de degré $\leq n$, et le coefficient λ_n en X^n vaut $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j}$.

Or, $\sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (1 + (-1)^k) \binom{n}{k} = \frac{1}{2} (1 + 1)^n + \frac{1}{2} (1 - 1)^n = \frac{1}{2} 2^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Prop : Les racines de T_n sont les $x_{k,n} = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$, avec $1 \leq k \leq n$

Remarque : Par degré, ce sont les seules racines de T_n , et elles sont simples.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = 2^{n-1} \prod_{k=1}^n (X - x_{k,n})$.

Preuve : Ni la formule de récurrence ni la formule explicite ne permettent de déterminer les racines.

On utilise la propriété caractéristique: $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Or, on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos(n\theta) = 0$ ssi $n\theta$ est de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$, c'est-à-dire de la forme $\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ sont DES racines de T_n .

On cherche maintenant combien de valeurs distinctes prennent les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$.

La fonction $\cos$ étant 2π -périodique et paire, on peut se limiter à $0 \leq k \leq n-1$.

Or, comme $\cos$ est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, avec $0 \leq k \leq n-1$ sont distincts.

On obtient ainsi n racines de T_n . Comme $\deg T_n = n$, ce sont LES seules racines de T_n .

Prop : On a $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$ et $\forall x \in [-1, 1]$, $|T_n(x)| \leq 1$

Preuve : On a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Avec $\theta = 0$, on obtient $T_n(1) = 1$. Avec $\theta = \pi$, on obtient $T_n(-1) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

Tout $x \in [-1, 1]$ et de la forme $\cos \theta$, et $T_n(x) = \cos(n\theta) \in [-1, 1]$.

Remarque : Le graphe de T_n effectuée sur $[-1, 1]$ des oscillations entre -1 et 1 .

Les zéros de T_n sont les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, qui sont répartis entre -1 et 1 , mais davantage concentrés sur les bords.

D'autre part, on a $|T_n(x)| = 1$ pour tout x de la forme $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, où $0 \leq k \leq n$. Plus précisément, on a $T_n(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)) = \cos(k\pi) = (-1)^k$, donc le graphe de T_n effectuée sur $[-1, 1]$ des oscillations entre -1 et 1 .

2) Prop : Notons T_n le polynôme de Tchebychev : on a $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

On a alors aussi $\forall t \in \mathbb{R}$, $T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}(nt)$ et $T_n(-\operatorname{ch} t) = (-1)^n \operatorname{ch}(nt)$.

Preuve : On sait que $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$.

On sait ici (trigo hyperbolique) que $\operatorname{ch}((n+1)t) + \operatorname{ch}((n-1)t) = 2\operatorname{ch}(t)\operatorname{ch}(nt)$.

D'où on obtient $T_n(\operatorname{ch} t) = \operatorname{ch}(nt)$ par récurrence d'ordre 2.

D'autre part, $T_n(-\cos \theta) = T_n(\cos(\theta + \pi)) = \cos(n(\theta + \pi)) = (-1)^n \cos(n\theta)$.

On en déduit (par unicité) que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Ce qui permet de conclure $T_n(-\operatorname{ch} t) = (-1)^n \operatorname{ch}(nt)$.