

1) Remarques

a) $f(x) = o_a(g(x))$ signifie $f(x) = g(x)o_a(1)$ au voisinage de a , où $o_a(1)$ désigne une fonction $\rightarrow 0$ pour $x \rightarrow a$.
 $f(x) = O_a(g(x))$ signifie $f(x) = g(x)O_a(1)$, où $O_a(1)$ désigne une fonction bornée au voisinage de a .

Remarque : On a par exemple $o(x)O(x^2) = x^3 o(1) O(1) = o(x^3)$

b) *Erreurs sur les équivalents* :

- on peut multiplier les équivalents et les mettre à la puissance α :

Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x)^\alpha \sim g(x)^\alpha$, car si $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x) = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \lambda(x)^\alpha = 1$

- ne pas sommer les équivalents : calculer avec $o()$

- ne pas composer les équivalents (à droite) : $(x+1) \sim_{+\infty} x$, mais e^{x+1} et e^x ne sont pas équivalents en $+\infty$.

- ne pas écrire $e^x \sim 1+x$ pour signifier $e^x = 1+x+o(x)$.

- ne pas confondre $f \sim_a g$ et $\lim_a(f-g) = 0$; on a en effet $f \sim_a g$ ssi $f-g = o(g)$.

b) *Partie principale d'un DL* :

Si $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n)$, avec a_k non tous nuls, alors $f(x) \sim a_px^p$, où $p = \min\{k \mid a_k \neq 0\}$.

c) *Unicité du DL* :

Supposons $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o(x^n) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + o(x^n)$.

S'il n'y a pas unicité, il existe un plus petit p tel que $a_p \neq b_p$. Alors $(a_p - b_p)x^p = o(x^p)$, donc $a_p = b_p$.

Conséquence : si f est paire, le DL de f est pair (car $f(x)$ et $f(-x)$ ont le même DL).

d) *Lien entre DL en $O()$ et DL en $o()$* .

Si $f(x) = O(x^{n+1})$, alors a fortiori $f(x) = o(x^n)$; si $f(x) = o(x^n)$, alors a fortiori $f(x) = O(x^n)$

e) Un DL correspond à des limites successives :

$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + o(x^2)$ équivaut à $c_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $c_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - c_0}{x}$ et $c_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - c_0 - c_1x}{x^2}$.

2) Intégration des DL et formule de Taylor-Young

a) *Intégration des DL* : Si $f'(x) = o(x^n)$, alors $f(x) = f(0) + o(x^{n+1})$.

Preuve : $f(x) - f(0) = xf'(y_x)$, donc $f'(y_x) = o(xy_x^n) = o(x^{n+1})$ car $y_x \in [0, x]$.

b) *Prop* : Si f est dérivable n fois en 0, alors
$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n).$$

Remarque : S'obtient par intégrations successives du DL de $f^{(n-1)}$,

ou bien par l'inégalité de TL : si f est C^{n+1} au voisinage de 0, on a $f(x) - P_n(x) = O(x^{n+1})$.

c) On peut dériver les DL si on sait (par Taylor-Young notamment) que le DL existe.

Exemple : $\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + x + \dots + x^{n+1} + o(x^n)$ donc $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + o(x^n)$.

En effet, $x \mapsto \left(\frac{1}{1-x}\right)^2$ admet un DL, et en dérivant, on doit obtenir celui de $\frac{1}{1-x}$.

d) *Lien entre dérivées et DL.*

f est continue ssi f admet un DL en a à l'ordre 0 : $f(a+h) = f(a) + o(1)$.

f est dérivable ssi f admet un DL en a à l'ordre 1 : $f(a+h) = \alpha + \beta h + o(h)$ ssi $f(a) = \alpha$ et $f'(a) = \beta$.

En revanche, pour $n \geq 2$, f peut admettre un $DL_n(a)$ sans que $f^{(n)}(a)$ existe.

Exemple : $f(x) = x^3 \cdot 1_Q(x)$. On a $f(x) = o(x^2)$. Mais f n'est continue (et dérivable) qu'en 0 ...

e) *Calculs de dérivées à l'aide de Taylor-Young et de l'unicité des DL.*

Exemple : $f(x) = (e^x - 1)^n \sim x^n$ et f de classe C^∞ , donc $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 1$, c'est-à-dire $f^{(n)}(0) = n!$

3) DL usuels

a) On a $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)}$, car $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + O(x^{n+1})$.

D'où $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ et par intégration, on obtient

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)}$$

On a aussi $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n})$, donc $\boxed{\arctan(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})}$.

b) Par Taylor-Young, on a $\boxed{\exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)}$.

Plus généralement, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(tz) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} x^n + o(x^n)$ lorsque $x \rightarrow 0$.

On obtient les DL de $\operatorname{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ et de $\cos(x) = \operatorname{ch}(ix)$, et de même pour sh et $\sin$:

$$\boxed{\operatorname{ch}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \text{ et } \cos(x) = \operatorname{ch}(ix) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})}$$

et

$$\boxed{\operatorname{sh}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \text{ et } \sin(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})}$$

Par exemple, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)$ et $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)$.

c) Pour $f(x) = (1+x)^\alpha$, on a $f^{(n)}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(1+x)^{\alpha-n}$. Donc

$$\boxed{(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)}.$$

On a donc $\boxed{\frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{k=0}^n \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!} x^k + o(x^n)}$. Les coefficients sont > 0 si $\beta > 0$.

Exemple : $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$.

Comme $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, alors $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$.

Exemple : Si p entier, $(1+x)^p = \sum_{k=0}^n \binom{p}{k} x^k + o(x^n)$ par le binôme tronqué.

d) $DL_5(0)$ de $\tan$: On peut déterminer le DL de $\tan$ par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$. Mais il y a mieux :

$\tan$ est C^∞ et impaire, $\tan x = x + ax^3 + bx^5 + \mathfrak{o}(x^5)$. D'où $\tan'(x) = 1 + 3ax^2 + 5bx^4 + \mathfrak{o}(x^4)$.

On a $\tan(x)^2 = x^2(1 + ax^2 + bx^4 + \mathfrak{o}(x^3)) = x^2(1 + 2ax^2 + \mathfrak{o}(x^2))$.

Comme $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$, alors $1 + 3ax^2 + 5bx^4 + \mathfrak{o}(x^4) = x^2 + 2ax^4 + \mathfrak{o}(x^4)$.

Par unicité du DL, on a $3a = 1$ et $5b = 2a$, d'où $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{15}$.

Remarque : Une autre méthode est d'utiliser $\tan(\arctan x) = x$.

Comme $\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \mathfrak{o}(x^4)$, alors $\tan(\arctan x) = (x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5) + ax^3(1 - \frac{1}{3}x^2)^3 + bx^5 + \mathfrak{o}(x^5)$.

On obtient ainsi $x + (a - \frac{1}{3})ax^3 + (b - a + \frac{1}{5})x^5 + \mathfrak{o}(x^5) = x$, d'où $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{15}$.