$\boxed{\textbf{Exemples de développements limités et asymptotiques}}$

1) Relations de négligeabilité, de domination, d'équivalence

a) $\boxed{\text{Un voisinage de } a \in \mathbb{R} \text{ est un intervalle } [a-\alpha, a+\alpha] \text{ avec } \alpha > 0 \text{ ; Un voisinage de } +\infty \text{ est } [M, +\infty[\text{, avec } M \in \mathbb{R}.}$

$\boxed{\mathfrak{o}_a(1) \text{ représente une fonction } x \longmapsto \varepsilon(x) \text{ définie un voisinage de } a \text{ et telle que } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0}$.

$\boxed{O_a(1) \text{ représente une fonction bornée sur un voisinage de } a.}$ On a alors $\mathfrak{o}_a(x) = x\mathfrak{o}_a(1)$ et $O_a(x) = xO_a(1)$.

Ainsi, $e^x = 1 + x + \mathfrak{o}(x)$ signifie $\begin{cases} e^x = 1 + x + x\varepsilon(x) \\ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$, c'est-à-dire $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - (1+x)}{x} = 0$

Ainsi, $e^x = 1 + x + O(x^2)$ signifie qu'il existe une constante K tel que $|e^x - (1+x)| \leq Kx^2$ au voisinage de 0.

Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a privé de a, $\boxed{f(x) = \mathfrak{o}_a(g(x)) \text{ ssi } \lim_{x\to a, x\neq a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0}$ (et $f(a) = 0$).

b) Propriétés de la relation d'équivalence $\sim$. On a $f(x) \sim g(x)$ ssi $f = g + \mathfrak{o}(g)$.

Ainsi, $f(x) \sim_a g(x)$ ssi il existe une fonction λ définie au voisinage de a telle que $\begin{cases} f(x) = g(x)\lambda(x) \\ \lim_{x\to 0} \lambda(x) = 1 \end{cases}$

Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a privé de a, on a $\boxed{f(x) \sim_a g(x) \text{ ssi } \lim_{x\to a, x\neq a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1}$ (et $f(a) = g(a)$).

Attention : Ne pas calculer avec les $\sim$: il faut toujours calculer en précisant les $\mathfrak{o}\,()$.

Exprimer toujours un équivalent par une expression sans somme. Par exemple, ne jamais écrire $e^x \sim 1 + x$.

Opérations : On peut multiplier et quotienter les équivalents :

Exemple : En $x = 0$, $\frac{(\sin x)(\ln x)}{x^2+x} \sim \frac{x(\ln x)}{x} = (\ln x)$; en $+\infty$, $\frac{(n^3+n+1)}{2n+1}\ln(1 + \frac{1}{n})e^n \sim \frac{n^3}{2n}\frac{1}{n}e^n = \frac{1}{2}ne^n$.

Exemple : En 0, $(e^x - 1)^n = x^n + \mathfrak{o}(x^n)$. En effet, $(e^x - 1) \sim x$, d'où $(e^x - 1)^n \sim x^n$.

Important : Si $f(x) \sim g(x)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $f(x)^\alpha \sim g(x)^\alpha$: en effet, si $\lim_{x\to a} \lambda(x) = 1$, alors $\lim_{x\to a} \lambda(x)^\alpha = 1$.

Attention : *En général, on ne peut pas composer les équivalents* :

Exemple : On a $(n+1) \sim_{+\infty} n$, mais $e^{n+1} = e \times e^n$ n'équivaut pas à e^n ...

Remarque : En fait, $e^{f(x)} \sim_{+\infty} e^{g(x)}$ ssi $\lim_{x\to+\infty} e^{f(x)-g(x)} = 0$, donc ssi $\lim_{+\infty}(f - g) = 0$.

Attention : $\boxed{\text{Ne pas confondre } f(x) \sim_a g(x) \text{ et } \lim_a(f - g) = 0}$. Par exemple, $n^2+n \sim_{+\infty} n^2$ et $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

2) Principes fondamentaux dans le calcul des DL et DA

a) Important. Se ramener à des DL_n en 0 : $f(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n + \mathfrak{o}(x^n)$.

Un DL de $f(x)$ en $x = a$ est un DL de $f(a + h)$ en $h = 0$. En pratique, $\boxed{\text{poser } x = a + h}$, et calculer un DL en h.

Un DL de $f(x)$ en $x = +\infty$ est un DL de $f(\frac{1}{h})$ en $h = 0^+$. En pratique, calculer un DL en faisant apparaître $h = \frac{1}{x}$.

Exemple : $DL_2(1)$ de $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + \mathfrak{o}\left(h^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + \mathfrak{o}_1\left((x-1)^2\right)$.

Ne pas développer le terme $(x - 1)^2$, car les termes apparaissent ici par importance décroissante.

Exemple : $DL_{+\infty}(1)$ de $\frac{n-1}{n+1} = \frac{1-h}{1+h}$ (avec $h = \frac{1}{n}$) $= (1-h)(1-h+\mathfrak{o}(h)) = 1 - \frac{2}{n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Important. $\boxed{\text{Principe de substitution}}$ (= composition des limites).

principe : Si $f(u) = \mathfrak{o}(g(u))$ en $u = 0$ et $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0$, alors $f(\varphi(x)) = \mathfrak{o}(g(\varphi(x)))$ en $x = 0$.

Exemple : $\frac{1}{1-u} = 1 + u + ... + u^n + \mathfrak{o}(u^n)$ et $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0$, donc $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + ... + (-1)^n x^{2n} + \mathfrak{o}(x^{2n})$.

Exemple : $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1+x+2x^2}$. Comme $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \mathfrak{o}(u^2)$.

On a $\lim_{x\to 0}(x+2x^2) = 0$. Avec $u = x + 2x^2$, on a $u \sim x$, donc $u^2 \sim x^2$ d'où $\frac{1}{1+x+2x^2} = 1 - (x+2x^2) + x^2 + \mathfrak{o}(x^2)$.

c) *Opérations sur les DL.*

Principe : On écrit les $\mathfrak{o}()$, et on utilise les propriétés de la forme $\mathfrak{o}(1) + \mathfrak{o}(1) = \mathfrak{o}(1)$, $\mathfrak{o}(1)O(1) = \mathfrak{o}(1)$.

Exemple : $(1 + ax + \mathfrak{o}(x))(1 + bx + \mathfrak{o}(x)) = 1 + (a+b)x + \mathfrak{o}(x)$, car $\mathfrak{o}(x)O(1) = \mathfrak{o}(x)$.

En général, on utilise des DL à l'ordre n pour déterminer le DL d'une somme ou d'un produit à l'ordre n.

d) *Partie principale (ou terme dominant) et unicité d'un DL.*

Si $f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + \mathfrak{o}(x^n)$ et $p < n$, alors $f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_p x^p + \mathfrak{o}(x^p)$: troncature.

En particulier, $\boxed{\text{si il existe } p = \min\{k \mid c_k \neq 0\}, \text{ alors } f(x) \sim c_p x^p \ (\textit{terme dominant})}$.

Unicité du DL. Si le $\mathrm{DL}_n(0)$ existe, il est unique.

En effet, par linéarité, on se ramène à $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + \mathfrak{o}(x^n) = 0$, donc $\forall k$, $a_k = 0$.

En particulier, le DL d'une fonction paire est paire et le DL d'une fonction impaire est impaire.

e) IMPORTANT : En général, $\boxed{\text{toujours commencer par mettre en facteur le terme dominant}}$.

Exemple : $\sqrt{1 + x^2 + x^3} = x^{3/2}\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)^{1/2} = x^{3/2}\left(1 + \frac{1}{2x} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Exemple : $\ln(1+x) = \ln(2+h) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}h) = \ln 2 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{8}h^2 + \mathfrak{o}(h^2)$, avec $h = x - 1$.

Exemple : $(\sin x)^3 = x^3(\frac{\sin x}{x})^3 = x^3(1 - \frac{1}{6}x^2 + \mathfrak{o}(x^2))^3 = x^3(1 - \frac{3}{6}x^2 + \mathfrak{o}(x^2)) = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \mathfrak{o}(x^5)$.

f) Un $DL_n(0)$ en « grand O » est de la forme $f(x) = c_0 + c_1 x + ... + c_n x^n + O(x^{n+1})$.

Pour obtenir un $DL_n(0)$ en $O(x^{n+1})$, il suffit de faire un $DL_{n+1}(0)$, car $c_{n+1}x^{n+1} + \mathfrak{o}(x^{n+1})$ est en $O(x^{n+1})$.

Remarque : Une fonction en $O(x^{n+1})$ est a fortiori en $\mathfrak{o}(x^n)$, car $O(x^{n+1}) = x^n O(x)$, et que $O(x)$ est en $\mathfrak{o}(1)$.

3) Formule de Taylor-Young

a) *Principe* : $\boxed{\text{On peut intégrer un DL}}$ (attention à la contante d'intégration).

Exemple : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \mathfrak{o}(x^{n-1})$, donc $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \mathfrak{o}(x^n)}$.

Exemple : $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + ... + (-1)^n x^{2n} + \mathfrak{o}(x^{2n})$, donc $\boxed{\arctan(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \mathfrak{o}(x^{2n+1})}$.

Exemple : $(1-x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \mathfrak{o}(x^2)$, donc $\boxed{\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \mathfrak{o}(x^5)}$.

b) *Formule de Taylor-Young.*

Prop : $\boxed{\text{Si } f \text{ est dérivable } n \text{ fois en } a \text{ (avec } n \in \mathbb{N}^*\text{), alors } f(a+h) = f(a) + hf'(a) + ... + \dfrac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \mathfrak{o}(h^n)}$.

Exemple : $\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + ... + \frac{1}{n!}x^n + \mathfrak{o}(x^n)$.

$\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ sont la partie paire et impaire de e^x : $\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + ... + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \mathfrak{o}(x^{2n})$.

$\cos(x) = \operatorname{ch}(ix) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - ... + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \mathfrak{o}(x^{2n})$.

Exemple : $DL_1(\frac{\pi}{6})$ de $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{6} + h) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}h + \mathfrak{o}(h)$.

On peut utiliser la relation $\sin(a+b) = ...$ ou bien directement la formule de Taylor-Young.

IMPORTANT : $DL_0(n)$ de $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + ... + \dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathfrak{o}(x^n)}$.

Exemple : $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})x^2 + \mathfrak{o}(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathfrak{o}(x^2)$.

Exemple : $\dfrac{(1+ax)^\alpha}{(1+bx)^\beta} = (1+ax)^\alpha(1+bx)^{-\beta} = (1+\alpha ax+\mathfrak{o}(x))(1-\beta bx+\mathfrak{o}(x)) = 1+(\alpha a-\beta b)x+\mathfrak{o}(x)$.

c) On peut dériver les DL si on sait (par Taylor-Young notamment) que le DL existe.

Exemple : $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = 1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+\mathfrak{o}(x^n)$.

d) *Lien entre dérivées et DL.*

f est continue ssi f admet un DL en a à l'ordre 0 : $f(a+h) = f(a)+\mathfrak{o}(1)$.

f est dérivable ssi f admet un DL en a à l'ordre 1 : $f(a+h) = \alpha+\beta h+\mathfrak{o}(h)$ ssi $f(a)=\alpha$ et $f'(a)=\beta$.

En revanche, pour $n \geq 2$, f peut admettre un DL_n sans que $f^{(n)}(a)$ existe.

Exemple : $f(x) = x^3\sin(\frac{1}{x^2})$. On a $f(x) = \mathfrak{o}(x^2)$, mais f' n'est même pas continue en 0.

e) *Calculs de dérivées à l'aide de Taylor-Young et de l'unicité des DL.*

Exemple : On a $\frac{1}{(2n+1)!}\arctan^{(2n+1)}(0) = \frac{1}{(2n+1)}$, donc $\arctan^{(2n+1)}(0) = (2n)!$

4) Calculs de développements limités

Important : Toujours commencer par évaluer les termes les plus imbriqués. Par exemple, pour déterminer le DL en $x=0$ de $\ln(1+\cos x)$, il faut d'abord voir que $1+\cos x$ est de la forme $2+\mathfrak{o}(1)$, puis on fait ensuite un DL de $1+\cos x$ à un ordre judicieusement choisi pour obtenir le DL de $\ln(1+\cos x)$ à l'ordre souhaité.

Exemple : $DL_2(0)$ de $\ln(1+\cos x) = \ln(2-\frac{1}{2}x^2+\mathfrak{o}(x^2)) = \ln 2+\ln(1-\frac{1}{4}x^2+\mathfrak{o}(x^2))$.

Comme $\ln(1+u) = u+\mathfrak{o}(u)$, on obtient (avec $u = -\frac{1}{4}x^2+\mathfrak{o}(x^2)$) : $\ln 2-\frac{1}{4}x^2+\mathfrak{o}(x^2)$.

Exemple : $DL_1(0)$ de $(a+bx+\mathfrak{o}(x))^\alpha = a^\alpha(1+cx+\mathfrak{o}(x)) = a^\alpha(1+c\alpha x+\mathfrak{o}(x))$, avec $c = \frac{b}{a}$.

Exemple : $DL_1(0)$ de $\frac{1+ax+\mathfrak{o}(x)}{1+bx+\mathfrak{o}(x)} = 1+(a-b)x+\mathfrak{o}(x)$.

Exemple : $DL_4(0)$ de $\frac{1}{\cos x} = (1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\mathfrak{o}(x^4))^{-1} = \frac{1}{1-u}$, avec $u = \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\mathfrak{o}(x^4)$.

On obtient donc $\frac{1}{\cos x} = 1+(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4)+(-\frac{1}{2}x)^2+\mathfrak{o}(x^2)$.

5) Obtention des développements limités par identification

a) *Développement d'une solution d'une équation différentielle. Exemple* : On a : $\tan' = 1+\tan^2$.

Par TY, $\tan(x) = x+ax^3+bx^5+\mathfrak{o}(x^5)$: DL impair. Comme tan est C^∞, alors $\tan' = 1+3ax^2+5bx^4+\mathfrak{o}(x^4)$. Par unicité du DL, on a : $a = \frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{15}$.

b) *Développement limité d'une fonction réciproque : Exemple* : On a $\arctan(\tan x)) = x$.

On connaît le $\mathrm{DL}_5(0)$ de arctan et on peut en déduire celui de tan en calculant le DL de $\arctan(\tan x))$.

c) *Développement limité de l'inverse* : *Exemple* : considérons $f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} = 1+ax+bx^2+\mathfrak{o}((x^2)$.

On écrit $(e^x-1)f(x) = x$. D'où $(1+ax+bx^2)(1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2)+\mathfrak{o}(x^2) = 1$, donc $a+\frac{1}{2} = 0$ et $b+\frac{1}{2}a+\frac{1}{6} = 0$.

6) Calculs de limites et recherches d'équivalents

Il est élégant de déterminer avant tout calcul l'ordre avec lequel on effectue les DL (pour limiter les calculs) : pour obtenir un équivalent, on cherche le premier terme non nul du DL. Et la détermination d'une limite non nulle est aussi un calcul d'équivalent : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda \neq 0$ ssi $f(x) \sim \lambda$.

Exemple : Calcul de $L = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{(\sin x)^2} - \dfrac{1}{x^2}$. On a $\dfrac{1}{(\sin x)^2} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-(\sin x)^2}{x^2(\sin x)^2}$.

Comme $x^2(\sin x)^2 \sim x^4$, alors on veut un $DL_4(0)$ de $x^2-(\sin x)^2$.

Or, $(\sin x)^2 = x^2(1-\frac{1}{6}x^2+\mathfrak{o}(x^2))^2$, donc $L = \frac{1}{3}$.

Exemple : Avec $u_n = \left(1+\dfrac{\lambda}{n}\right)^n$, calculs de $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et obtention d'un équivalent de $(u_n - L)$.

On a $\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)\right)$. Or, $n\left(\frac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right) = \lambda + \mathfrak{o}\,(1)$, donc $L = e^{\lambda}$.

Pour obtenir un équivalent, on calcule un terme supplémentaire :

$n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2n} + \mathfrak{o}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$, donc $u_n = e^{\lambda}e^{-\lambda^2/2n+\mathfrak{o}(1/n)} = e^{\lambda}\left(1-\frac{\lambda^2}{2n}+\mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Donc $u_n - L \sim -\frac{\lambda^2 e^{\lambda}}{2n}$.

IMPORTANT : A connaître : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{\lambda}{n}+\mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = e^{\lambda}}$.

Exemple : Calcul de $L = \lim_{n\to+\infty}\left(2\cos\left(\dfrac{n+1}{3n+1}\pi\right)\right)^n$.

On a $\lim_{n\to+\infty} 2\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{3n+1}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$, donc on bien une forme indéterminée $1^{+\infty} = e^{+\infty\times 0}$.

On a $\frac{(n+1)\pi}{3n+1} = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{9n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, donc $2\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = 2\frac{1}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2\pi}{9n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, et $L = \exp(-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}})$.

Exemple : Equivalent en $+\infty$ de $e^{\sqrt{n^2+n}} = e^{n+1/2+\mathfrak{o}_{+\infty}(1)} \sim \sqrt{e}e^n$.

Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right) = \frac{1}{2}$, car $\sqrt{x^2+x+2} = x(1+h+2h^2)^{1/2} = x+\frac{1}{2}+\mathfrak{o}_{+\infty}(1)$.

Exemple : Soient a et $b>0$. Limites en $+\infty$ et en 0^+ de $f(x) = \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

En $+\infty$, avec $b\le a$, $\frac{1}{2}(a^x) \le \frac{1}{2}(a^x+b^x) \le \frac{1}{2}(a^x)$, donc par pincement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \max(a,b)$.

En 0^+, $a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \mathfrak{o}\,(x)$, donc $\frac{1}{2}(a^x+b^x) = 1+\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)x + \mathfrak{o}\,(x)$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{ab}$.

7) Etude du signe par l'obtention d'un équivalent

IMPORTANT : $\boxed{\text{Deux fonctions équivalentes en } a \text{ ont même signe au voisinage de } a}$.

Ainsi, si $f(x)\sim c_p x^p$, alors $f(x)$ change de signe en 0 ssi p est impair.

a) *Condition suffisante de maximum local.*

Exemple : Si $f'(a)=0$ et $f''(a)<0$, alors f admet en a un maximum local strict.

En effet, on a $f(x) = f(a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \mathfrak{o}_a((x-a)^2)$, donc en $x=a$, $f(x)-f(a)\sim \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2$.

Donc $f(x)<f(a)$ sur un voisinage de a privé de a.

b) *Recherche d'une asymptote et de la position de la courbe par rapport à son asymptote.*

Principe : La courbe $y=f(x)$ admet la droite $y=ax+b$ comme asymptote en $+\infty$ ssi f admet un DA de la forme $f(x) = ax+b+\mathfrak{o}_{+\infty}(1)$: on cherche donc un $DL_1(+\infty)$ de $\frac{f(x)}{x}$.

Si de plus $f(x) = ax+b+\frac{\lambda}{x}+\mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x})$ avec $\lambda\neq 0$, on a $f(x)-ax-b\sim\frac{\lambda}{x}$ en $+\infty$. La courbe est au voisinage de $+\infty$ au-dessus de son asymptote ssi $\lambda>0$, et au-dessous ssi $\lambda<0$.

Exemple : Asymptote et position par rapport à la courbe pour $f(x) = (x-1)\arctan(x+1)$ en $+\infty$

On rappelle que $\forall x>0$, $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

On cherche a priori un $DL_2(+\infty)$ de $\frac{f(x)}{x}$ (car on espère obtenir $f(x) = ax+b+\frac{\lambda}{x}+\mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x})$ avec $\lambda\neq 0$).

On a $\arctan\left(\frac{1}{x+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x^2})\right) = \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)+\mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$.

Donc $f(x) = (x-1)\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathfrak{o}_{+\infty}(\frac{1}{x^2})\right) = \frac{\pi}{2}x - (1+\frac{\pi}{2}) + \frac{2}{x} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

On en déduit que la courbe est au-dessus de son asymptote $y = \frac{\pi}{2}x-(1+\frac{\pi}{2})$ au voisinage de $+\infty$.

8) Exemples de développements asymptotiques

Exemple : En $+\infty$, $\ln(x+1) = \ln x + \frac{1}{x} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exemple : En 0^+, $x^x = e^{x\ln x} = 1 + (x\ln x) + \frac{1}{2}(x\ln x)^2 + \mathfrak{o}\left((x\ln x)^2\right)$, car $\lim_{x\to 0}(x\ln x) = 0$.