$\boxed{\textbf{Polynômes. Exemples}}$

1) Racines des polynômes

a) Ordre de multiplicité d'une racine

Exo : Racine d'ordre $\geq m$: Montrer que $\boxed{(X-a)^m \text{ divise } P \text{ ssi } P(a) = P'(a) = ... = P^{(n-1)}(a) = 0}$.

Exo : Si a racine de P d'ordre $m \geq 1$, alors a est racine de P' d'ordre $(m-1)$.

Exo : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P' divise P ssi $P = \lambda(X-a)^n$.

Remarque : Plus généralement, $\deg \operatorname{pgcd}(P, P') = n - r$, où r est le nombre de racines de P distinctes.

Exo : Montrer que les racines (complexes) de $P = X^5 - 5X - 1$ sont simples.

Exo : Calculer le quotient et le reste de $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $(X - \lambda)$.

b) Nombre de racines d'un polynôme

Rappel : Soient $a_1, ..., a_r$ distincts. $\boxed{P(a_1) = P(a_2) = ...P(a_r) = 0 \text{ ssi } (X-a_1)...(X-a_r) \text{ divise } P}$.

Plus généralement : ($\forall j, \forall i < m_j, P^i(a_j) = 0$) ssi $(X-a_1)^{m_1}...(X-a_r)^{m_r}$ divise P.

Conséquence : Un polynôme non nul de degré $\leq n$ admet au plus n racines comptées avec multiplicité.

Conséquence : Si P de degré n et si $P(a_i) = 0$ pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$, alors $P = \lambda(X-a_1)...(X-a_n)$:
Autrement dit, P est scindé et les a_i sont ses seules racines, et elles sont simples.

Exo : Soient n et $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $X^p - 1$ divise $X^n - 1$ (dans $\mathbb{C}[X]$) ssi p divise n.

Exo : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner une CNS sur θ pour que $X^2 - 2(\cos\theta)X + 1$ divise $X^n - 1$.

Exo : Montrer que $(X+1)^n - (X-1)^n = 2\sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k} X^{n-k} = P = 2n\prod_{k=1}^{n-1}(x + i \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right))$.

Exo : Soit $P \in \mathbb{C}([X])$ non constant. Montrer que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \longmapsto P(z)$ est surjective.
Caractériser les valeurs admettant exactement n antécédents par f.

c) Polynômes réels

Exo : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que P change de signe en la racine a ssi a est une racine d'ordre impair.

Exo : On considère $P = X^3 + aX + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que P admet trois racines réelles distinctes ssi $27b^2 + 4a^3 < 0$.

Remarque : En déduire une CNS pour que $Q = X^3 + \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ admette trois racines réelles distinctes.

Exo : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$.
Montrer que si P est scindé (resp. scindé à racines simples), alors P' est scindé (resp. scindé à racines simples).

Exo : Posons $R = (X^2 - 1)^n$, et on note $R^{(n)}$ la dérivée n-ième de R.
Montrer que $R^{(n)}$ est scindé à racines simples, et que ses racines appartiennent à $]-1, 1[$.

Exo : (i) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Que dire des variations de $\frac{P'}{P}$?
(ii) Montrer que $P(x)P''(x) \leq P'(x)^2$. En déduire $P^{(k)}(x)P^{(k+2)}(x) \leq P^{(k+1)}(x)^2$.

Exo : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé (à racines simples). Montrer que pour tout λ, $Q = P' - \lambda P$ est scindé.

2) Polynômes scindés et relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

Rappel : Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X-z_1)...(X-z_n)$, alors $\sum_{i=1}^{n} z_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ et $z_1 z_2 ... z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

Exo : Soient λ et μ les racines dans $\mathbb{C}$ de $P(X) = X^2 - aX + 1$, avec $a \in \mathbb{R}$. Que dire de $|\lambda|$ et $|\mu|$ par rapport à 1 ?

Exo : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Montrer qu'il existe α tel que $Q(X) = P(X + \alpha)$ admette un coefficient nul en X^{n-1}. Interpréter géométriquement la valeur de α.

Exo : Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n(X - z_1)...(X - z_n)$, avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
En considérant $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_k}$.

Exo : Soit P un polynôme scindé. Montrer que P est pair (c'est-à-dire $P(X) = P(-X)$) ssi 0 est racine d'ordre pair et les racines de P sont deux à deux opposées (avec multiplicités).

Exo : On prend $a_k \in \mathbb{Z}$ et $a_n = 1$. Montrer que les $S_k = z_1^k + z_2^k + ... + z_n^k$ appartiennent à $\mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3) Décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme réel ou complexe

a) Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, Théorème de D'Alembert-Gauss

Remarque : Tout polynôme non nul est scindé : Les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1.

Exemple fondamental : $X^n - 1 = \prod_{z \in U_n}(X - z) = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega^k)$, où $\omega = e^{2i\pi/n}$.

Exo : Factoriser $P = X^4 - 1 - i$ dans $\mathbb{C}[X]$ et $Q = 1 - X^p + X^{2p} - ... + (-1)^q X^{pq}$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Exo : Evaluer $\prod_{k=0}^{n-1}(a - e^{2ik\pi/n})$ pour tout $a \in \mathbb{C}$, et montrer que $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$.

b) Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Remarque : Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = \prod_{k=1}^{m}(X - z_k)^{m_k} \in \mathbb{C}[X]$, alors $\overline{P}(X) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k = \overline{\lambda} \prod_{k=1}^{m}(X - \overline{z_k})^{m_k}$.
Ainsi, si P est réel, c'est-à-dire $P = \overline{P}$, les racines sont deux à deux conjuguées (avec multiplicité).

Rappel : Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$: $(X - \rho e^{i\theta})(X - \rho e^{-i\theta}) = X^2 - 2\rho(\cos\theta)X + \rho^2$.

On a $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i) \prod_{j=1}^{s}[(X - \beta_j)(X - \overline{\beta_j})]$, d'où $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - \alpha_i) \prod_{j=1}^{s} \left(X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\beta_j)X + |\beta_j|^2\right)$.

Exo : Factoriser $P = X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $Q = X^6 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Remarque : Les polynômes réels à valeurs strictement positives sont les $P = \lambda \prod_{j=1}^{s} \left(X^2 + a_j X + b_j\right)^{n_j}$, où $\lambda > 0$ et où les polynômes $X^2 + a_j X + b_j$ de degré 2 sont irréductibles (c'est-à-dire de discriminant $a_j^2 - 4b_j < 0$)..

Exo : Caractériser les polynômes réels à valeurs positives sur $\mathbb{R}$.

4) Polynômes de Tchebychev

Exo : Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n tel que $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Exo : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1}(X - \cos\left((2k+1)\,\frac{2\pi}{n}\right))$.

5) Interpolation de Lagrange en des points distincts $a_1, ..., a_n$

Exo : Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $a \neq b$. Expliciter l'unique droite affine telle que $L(a) = f(a)$ et $L(b) = f(b)$.

Exo : Montrer l'unicité et expliciter le polynôme $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = y_k$.

Préciser aussi *tous* les polynômes $A \in K[X]$ vérifiant tels que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $A(a_k) = y_k$.

Exo : Calculer le reste R_n de la division euclidienne de $P_n(X) = X^n$ par $X^2 - 2(\cos\theta)X + 1$.

Exo : Soit $Q(X) = (X - a_1)(X - a_2)...(X - a_n)$. On pose $L_j(X) = \prod_{k \neq j} \dfrac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

Montrer que pour tout polynôme P de degré $< n$, $\boxed{\sum_{j=1}^{n} P(a_j)L_j(X) = P(X)}$.

Exo : Avec les notations de l'exo précédent, montrer que $L_j(X) = \dfrac{Q(X)}{Q'(a_k)(X - a_k)}$.

En déduire que $\dfrac{1}{X^n - 1} = \dfrac{1}{n} \sum_{z \in U_n} \dfrac{z}{X - z}$, où $U_n = \{1, \omega, \omega^2, ..., \omega^{n-1}\}$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$