Calculs de dérivées

1) Dérivée d'un produit et formule de Leibniz

a) $(fg)' = f(g + fg'$ et plus généralement $(f_1...f_n)' = \sum_{k=1}^n \ f_k'(\prod_{j\neq k} f_j)$ (cf d'ailleurs dérivée logarithmique).

b) *Formule de Leibniz* **:** Si f et g sont de classe C^n, alors $\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$.

Remarque : La formule se prouve par récurrence à l'aide de la formule du triangle de Pascal.

Exemple important : $(xf)^{(n)}(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$, et de même avec $(x^2 f)^{(n)}(x)$.

2) Dérivée d'une composée

a) Si f et g sont dérivables, alors $\boxed{(g\circ f)' = f' \times (g' \circ f)}$

Exemple : Dérivée n-ième de x^α. Avec $f : x \longmapsto x^\alpha$, on a $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

Important : De façon génénral, pas de formule simple exprimant la dérivée n-ième d'une composée.

b) *Dérivée d'une composée avec une fonction affine.* Si $g(x) = f(ax+b)$, alors $g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax+b)$.

Exemple : La dérivée n-ième d'une fonction paire est paire si n est paire, et impaire si n est impair.

Exemple : Les dérivées d'une fonction T-périodique est T-périodique.

c) Si g est > 0, alors $\boxed{(g^\alpha)' = \alpha g' g^{\alpha-1}}$ et $\left(\dfrac{1}{g^\alpha}\right)' = \dfrac{-\alpha g'}{g^{\alpha+1}}$.

Important : $\boxed{\left(\dfrac{f}{g^\alpha}\right)' = \dfrac{f'g - \alpha f g'}{g^{\alpha+1}}}$. En effet, on a $\left(\dfrac{f}{g^\alpha}\right)' = \left(f \times \dfrac{1}{g^\alpha}\right)' = \dfrac{f'}{g^\alpha} - \dfrac{\alpha f g'}{g^{\alpha+1}}$.

Exemple : $\dfrac{d}{dx}\dfrac{1}{(1-x)^\beta} = \dfrac{\beta}{(1-x)^{\beta+1}}$, donc $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{(1-x)^\beta} = \dfrac{\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}{(1-x)^{\beta+n}}$.

Exemple : $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \dfrac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$ et $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{(1+x^2)^\alpha}\right) = \dfrac{(1+x^2)f'(x) - 2\alpha x f(x)}{(1+x^2)^{\alpha+1}}$.

3) Dérivée d'une réciproque

a) *Prop* : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que f' *ne s'annule pas.*

Alors f définit une bijection de I sur $J = f(I)$, et $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$. Ainsi, $f^{-1} : J \to I$ est de classe C^1.

Remarque : On retrouve aisément la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f'\circ f^{-1}}$ en dérivant $f \circ f^{-1} = \text{Id}$.

b) *Exemples importants* : arcsin et arctan

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \ \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}.$$

c) *Corollaire* : Soit $f : I \to J$ est une bijection de classe C^n, avec $n \geq 1$.

On suppose que f' *ne s'annule pas.* Alors $f^{-1} : J \to I$ est de classe C^n.

4) Dérivée logarithmique

Prop : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et ne s'annule pas, alors $\boxed{(\ln|f|)' = \dfrac{f'}{f}}$

Exemple : On pose $\forall x > 0$, $f(x) = x^n e^{-x}$. Alors $f'(x)$ est du signe de $(\ln f)' = \dfrac{n}{x} - 1$, donc $\sup f = f(n)$.

Exemple à connaître : Si $P(x) = \lambda \prod_{k=1}^n (x-a_k)^{m_k}$, alors $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{d}{dx}\ln|P(x)| = \sum_{k=1}^n \dfrac{m_k}{x-a_k}$ (pour $x \neq a_k$).

Exemples de calculs de primitives

Notation : Si f continue par morceaux sur I, $\int f(x)\,dx$ désigne les primitives de f sur I.

Deux primitives de f diffèrent d'une constante. *Exemple* : $\int(\sin x)\,dx = -\cos x + k$, avec k constante.

Propriétés fondamentales :

- *Intégrations par parties* : Si f continue et g C^1, $\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$.

- *Changements de variable* : $\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du$, avec $u = \varphi(x)$.

Exemple : Avec $u = e^x$, $\int \dfrac{1}{e^x - 1}\,dx = \int \dfrac{1}{(u-1)u}\,du = \int \left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u}\right)\,du = \ln\left|\dfrac{e^x - 1}{e^x}\right| + k$.

1) Exponentielle (exp, ch, sh, cos, sin) : expression à l'aide d'exponentielles réelles ou complexes

Ainsi, $\int \cos(bx)e^{ax}\,dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(a+ib)x}\,dx\right)$.

Par exemple, $\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-t}\,dt = \mathrm{Re}\left(\left[\dfrac{e^{(-1+i\omega)t}}{-1+i\omega}\right]\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-i\omega}\right) = \dfrac{1}{1+\omega^2}$.

2) Produits polynômes-exponentielles

On procède par intégrations par parties successives.

Exemple : Pour $a \neq 0$ et P polynôme de degré n, $\int P(x)e^{\alpha x}\,dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k P^{(k)}(x)\dfrac{e^{ax}}{a^{k+1}}$.

3) Polynômes en cosinus et sinus

Il s'agit de calculer $\int(\cos t)^p(\sin t)^q\,dt$.

Méthode générale : Par linéarisation.

Mais il y a plus simple si p ou q est impair :

On se ramène en effet à $\int P(\cos t)(\sin t)\,dt$ ou $\int P(\sin t)(\cos t)\,dt$, et on prend $u = \cos t$ ou $u = \sin t$.

Exemple : $\int(\cos t)^2\,dt = \dfrac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2}\sin 2t + k$, où k constante.

Remarque : La primitive oscille autour de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}t$, car$\frac{1}{2}$ est la valeur moyenne de $(\cos t)^2$. En effet, $(\cos t)^2$ et $(\sin t)^2$ ont naturellement la même valeur moyenne, et $(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$.

Exemple : $\int(\cos t)^3\,dt = \int(1-\sin^2 t)\,(\cos t)\,dt = \int(1-u^2)\,du = u - \frac{1}{3}u^3 + k$, avec $u = \sin t$.

On en conclut que $\int(\cos t)^3\,dt = (\sin t) - \frac{1}{3}(\sin t)^3 + k$.

4) Fractions rationnelles

a) *Exemples à connaître*

Exemple : Si $a > 0$, $\boxed{\int \dfrac{dt}{t^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\int \dfrac{d(t/a)}{1+(t/a)^2} = \dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{t}{a}\right) + k}$. Ainsi, $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2+a^2} = \dfrac{\pi}{2a}}$.

Exemple : Si $a \neq b$, $\boxed{\int \dfrac{dt}{(t+a)(t+b)} = \dfrac{1}{b-a}\int\left(\dfrac{1}{t+a} - \dfrac{1}{t+b}\right)\,dt = \dfrac{1}{b-a}\ln\left(\left|\dfrac{t+a}{t+b}\right|\right) + k}$.

Ainsi, si $0 < a < b$, $\boxed{\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(t+a)(t+b)} = \dfrac{1}{b-a}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right)}$.

Remarque : Ne surtout pas décomposer $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(t+a)(t+b)}$ en utilisant $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{t+a}$ et $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{t+b}$ (qui valent $+\infty$).

Remarque : En faisant tendre b vers a, $\dfrac{\ln(b)-\ln(a)}{b-a}$ tend vers $\dfrac{1}{a}$, qui est bien $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{(t+a)^2}=\left[-\dfrac{1}{t+a}\right]_0^{+\infty}$.

Exemple : $\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{1}{1+t}\right)\,dt$ converge car $\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{1}{2+t}=\dfrac{2t-1}{(1+t^2)(2+t)}=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

On a $\int_0^{+\infty}\left(\dfrac{t}{1+t^2}-\dfrac{1}{2+t}\right)\,dt=\left[\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)-\ln(2+t)\right]_0^{+\infty}=\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{2+t}\right)\right]_0^{+\infty}=\ln 2.$

b) *Méthode générale : décomposition en éléments simples* (dans $\mathbb{R}(X)$)

Exemple : $\int\dfrac{1}{1-t^2}\,dt=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{1+t}+\dfrac{1}{1-t}\right)\,dt=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right)+k.$

Exemple : $\int\dfrac{1}{t^2+2t+2}\,dt=\int\dfrac{dt}{(t+1)^2+1}=\arctan(t+1)+k$, et $\int\dfrac{(2t+1)}{t^2+2t+2}\,dt=\ln\left(t^2+2t+2\right)+k.$

D'où $\int\dfrac{t}{t^2+2t+2}\,dt=\dfrac{1}{2}\ln\left(t^2+2t+2\right)-\dfrac{1}{2}\arctan(t+1)+k$, car on décompose $t=\dfrac{1}{2}(2t+1)-\dfrac{1}{2}$.

c) P*remiers exemples se ramenant à des primitives de fractions rationnelles*

Exemple : Fraction rationnelles en t et $\sqrt{t}$. On effectue le changement de variable $x=\sqrt{t}$.

Exemple : $\int\dfrac{dt}{\sqrt{t}+1}=\int\dfrac{2x}{x+1}\,dx=2\int 1-\dfrac{1}{x+1}\,dx=2x-2\ln(x+1)=2\sqrt{t}-2\ln(\sqrt{t}+1)+k.$

d) *Fractions rationnelles en* e^t, $\operatorname{ch} t$ *et* $\operatorname{sh} t$: On effectue le changement de variable $x=e^t$.

Remarque : Il y a plus simple si on peut mettre l'intégrale sous la forme $\int F(\operatorname{ch} t)(\operatorname{sh} t)\,dt$ ou $\int F(\operatorname{sh} t)(\operatorname{ch} t)\,dt$.

Exemple : Calcul de $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{\operatorname{ch} t}$ de deux façons.

On a $\boxed{\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{\operatorname{ch} t}=\int_0^{+\infty}\dfrac{2e^t\,dt}{e^{2t}+1}=2\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}=2\left[\arctan(x)\right]_1^{+\infty}=\dfrac{\pi}{2}}$ (avec $x=e^t$).

Autre méthode : $\boxed{\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{\operatorname{ch} t}=\int_0^{+\infty}\dfrac{(\operatorname{ch} t)}{(\operatorname{ch} t)^2}\,dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{ch} t}{(\operatorname{sh} t)^2+1}\,dt=\int_0^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+1}=\dfrac{\pi}{2}}$ (avec $x=\operatorname{sh} t$).

e) *Fractions rationnelles en* $\cos t$ *et* $\sin t$

Méthode générale : On effectue le changement de variable $t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, c'est-à-dire $\theta=2\arctan(t)+2k\pi$.

On a $\int F(\cos\theta,\sin\theta)\,d\theta=\int F(\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)\,\dfrac{2\,dt}{1+t^2}$.

Attention : Ce changement de variable suppose $\theta\in]-\pi+2k\pi,+\pi+2k\pi[$.

Exemple : Calcul de $J=\int_0^{2\pi}\dfrac{d\theta}{2+\cos\theta}$. Il est nécessaire de couper l'intégrale en deux.

Avec $t=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, on obtient $\int_0^{\pi}\dfrac{d\theta}{2+\cos\theta}=\int_0^{+\infty}\dfrac{2\,dt}{3+t^2}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\pi}{2}$ donc par symétrie, $J=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{2\,dt}{3+t^2}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Cas particuliers : Il y a souvent des changements de variables plus simples :

Avec $x=\cos\theta$, $\int\dfrac{d\theta}{\sin\theta}=\int\dfrac{dx}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\ln(1+x)-\dfrac{1}{2}(1-x)+k=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)+k.$

Remarque : Sachant que $1+\cos\theta=2\cos^2(\frac{\theta}{2})$ et $1-\cos\theta=2\sin^2(\frac{\theta}{2})$, on obtient $\ln\left|\tan(\frac{\theta}{2})\right|+k$.

f) *Intégrales abéliennes*

Exemple : $\int_0^1 t+\sqrt{1-t^2}\,dt$. On utilise le changement de variable $t=\sin\theta$, avec $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

Exemple : $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x)\sqrt{(\operatorname{ch} x)^2-1}}\,dx=\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\,dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{2}{1+u^2}\,du$, où $u=e^x$.

Décomposition d'une fraction rationnelle réelle ou complexe en éléments simples

1) *Def* : Soit $R = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$ irréductible, c'est-à-dire A et B polynômes premiers entre eux.

Les racines de R sont les racines de A, les pôles de R sont les racines de B.

Def : Le degré de R est définie par $\deg(R) = \deg(A) - \deg(B) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Cette définition est valide car la valeur de $\deg(A) - \deg(B)$ ne dépend pas du choix du représentant choisi.

2) *Def* : Un élément simple est une fraction $\dfrac{A}{P^m}$, où $\begin{cases} P \text{ est un polynôme irréductible} \\ m \geq 1 \\ \deg(A) < \deg(P) \end{cases}$

Ainsi, les éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sont les $\dfrac{\lambda}{(X-a)^m}$, avec $m \geq 1$.

$\boxed{\text{Les éléments simples dans } \mathbb{R}(X) \text{ sont les } \dfrac{\lambda}{(X-a)^m} \text{ et les } \dfrac{\alpha X + \beta}{(X^2+aX+b)^m}, \text{ avec } m \geq 1 \text{ et } a^2 - 4b < 0}$.

3) *Théorème de décomposition en éléments simples* (admis) **:** Toute fraction rationnelle $R = \dfrac{A}{B}$ s'écrit de façon unique comme somme d'un polynôme E et d'éléments simples $\dfrac{A}{P^m}$, où P^m divise B.

De plus, si $\deg R \geq 0$, on a $\deg E = \deg R$. Sinon, E est le polynôme nul.

Exemple : Considérons $R = \dfrac{2X}{X+1}$. On a $X = \alpha + \dfrac{\beta}{X+1}$, où $\alpha = 2$ et $\beta = -2$.

Remarque : En fait, il suffit d'écrire $2X = 2(X+1) - 2$.

Exemple : Considérons $R = \dfrac{X^2}{(X^2+1)(X-1)} \in \mathbb{R}[X]$. Comme $\deg(R) < 0$, alors $E = 0$.

Il existe un unique $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = \dfrac{aX+b}{X^2+1} + \dfrac{c}{(X-1)}$.

Exemple : Considérons $R = \dfrac{1}{(X^2+1)^2} = \dfrac{1}{(X+i)^2(X-i)^2}$.

Donc il existe un unique $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^3$ tel que $R = 1 + \dfrac{a}{(X-i)^2} + \dfrac{b}{(X-i)} + \dfrac{c}{(X+i)^2} + \dfrac{d}{(X+i)}$.

Il suffit ensuite de développer l'expression et par identification, d'obtenir les coefficients a, b, c, d.

Exemple : Pour $a \neq b$, $\dfrac{1}{(X-a)(X-b)} = \dfrac{\alpha}{X-a} + \dfrac{\beta}{X-b} = \dfrac{(\alpha+\beta)X - (\alpha b - a\beta)}{(X-a)(X-b)}$.

Donc $\alpha + \beta = 0$ et $\alpha b - a\beta = -1$, d'où $\beta = -\alpha = \dfrac{1}{a-b}$.

3) *Détermination de la partie polaire d'un pôle simple*

Principe : Supposons que a est un pôle simple de $R = \dfrac{A}{B} = \dfrac{A}{(X-a)B^*}$, c'est-à-dire $\begin{cases} a \text{ racine simple de } B \\ a \text{ n'est pas racine de } A \end{cases}$

Alors la décomposition en éléments simples est de la forme $\boxed{R = \dfrac{\lambda}{X-a} + S}$, où S est une fraction n'admettant pas a comme pôle. Il y a deux méthodes pour déterminer λ.

Méthode algébrique : On multiplie la relation par $(X-a)$ et on prend la valeur en a.

Méthode asymptotique : On effectue une étude locale de $R(x)$ au voisinage de $x = a$.

En effet, on a $R(x) = \dfrac{\lambda}{x-a} + O_a(1)$ mais par aileurs, on a aussi $R(x) \sim_a \dfrac{A(a)}{B'(a)(x-a)}$.

On en déduit par unicité du développement limité $\lambda = \dfrac{A(a)}{B'(a)}$.