$\boxed{\textbf{Topologie dans } \mathbb{R}}$

1. Limite d'une suite

a) **Limite finie**. Def : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ssi $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Remarque : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ssi $\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$.
Remarque : On peut remplacer $|u_n - l| \leq \varepsilon$ par $|u_n - l| < \varepsilon$ (on a en effet $|u_n - l| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ pour n assez grand).

Prop : Toute suite convergente est bornée (à partir d'un certain rang, et les termes précédents sont en nombre fini).

b) **Important**. *Prop* : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $k < l$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n > k$.
Exemple d'utilisation : Si $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l < k$, alors $u_n = O(k^n)$.

c) **Limites infinies**. Def : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ ssi $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

d) *Opérations sur les limites* : Sommes, produits, passage à la valeur absolue, au max (avec $\max(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|y-x|}{2}$).
Remarque : $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger sans que les suites convergent.

e) **Pincements (= théorème des gendarmes)**

Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour n assez grand et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
Si $|u_n| \leq \alpha_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$; si $u_n \geq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

f) **Propriété (hors-programme comme cours) du “ pincement avec** ε ” :

Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|u_n| \leq \varepsilon + \alpha_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple : *Théorème de Cesaro* : si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k = l$.

2. Voisinages

a) **Voisinages élémentaires**

Def : Les voisinages (élémentaires) de $a \in \mathbb{R}$ sont les intervalles $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, où $\varepsilon > 0$.

Def : Les voisinages (élémentaires) de $+\infty$ sont les intervalles $[M, +\infty[$, où $M \in \mathbb{R}$.

Remarque culturelle : On appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage élémentaire de a.

Propriété : Une intersection FINIE de voisinages (élémentaires) est un voisinage (élémentaire) :

$$\begin{cases} \cap_{i=1}^{n} [a - \varepsilon_i, a + \varepsilon_i] = [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \qquad \text{avec} \quad \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ...\varepsilon_n) > 0 \\ \cap_{i=1}^{n} [M_i, +\infty[= [M, +\infty[\qquad \text{avec } M = \max(M_1, M_2, ...M_n) \end{cases}$$

b) **Propriété vraie au voisinage d'un point**. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit qu'une propriété $P(x)$ est vraie au voisinage de $a \in$ ssi il existe un voisinage (élémentaire) V de a telle que $\forall x \in V$, $P(x)$.

Remarque : Si $P(x)$ et $Q(x)$ sont vraies au voisinage de a, il en est de même de la propriété ($P(x)$ et $Q(x)$).

Terminologie. $f : I \to \mathbb{R}$ est bornée au voisinage de a ssi il existe un voisinage V de a tel que f est bornée sur $V \cap I$.
Par exemple, toute fonction convergente en a est bornée au voisinage de a.

3. Limite d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Pour définir la notion de “ limite de $f(x)$ quand x tend vers a ”, il faut que a soit adhérent à I.
Ainsi, si I est un intervalle, a appartient à I ou est une borne de I.

a) **Limite finie.** *Def* : Si $a \in \mathbb{R}$: On dit que $f(x)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a ssi

$$\forall\varepsilon > 0, \ \ \exists\alpha > 0, \ \ \forall x \in I, \ \ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Si $a = +\infty$: On dit que $f(x)$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists M \in \mathbb{R}, \ \ \forall x \in I, \ \ x \geq M \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Prop et def : Si la limite existe, elle est unique, notée $\lim_{x\to a} f(x)$.

Terminologie : On note $\lim_{x\to a} f(x) = l^+$ ssi ($\lim_{x\to a} f(x) = l$ et $f(x) > l$ au voisinage de a).

Remarque : La notion de voisinage permet d'unifier les deux cas $a \in \mathbb{R}$ et $a = +\infty$:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = l \ \text{ ssi } \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists V \text{ voisinage de } a, \ \forall x \in I \cap V, \ \ |f(x) - l| \leq \varepsilon}$$

Remarque importante : Toute fonction convergente en a est bornée au voisinage de a.
En effet, au voisinage de a, on a $|f(x) - l| \leq 1$, d'où $|f(x)| \leq 1 + |l|$.

Important : *Prop* : $\begin{cases} \text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = l \text{ et } k < l, \text{ alors } f(x) > k \text{ au voisinage de } a \\ \text{Si } \lim_{x\to a} f(x) = l \text{ et } k > l, \text{ alors } f(x) < k \text{ au voisinage de } a \end{cases}$

Exemple : Si $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0$, alors f est strictement positive au voisinage de a.

b) **Limite infinie.** *Def* : Si $a \in \mathbb{R}$: on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a ssi

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, \ \ |x - a| \leq \alpha \Rightarrow f(x) \geq K.$$

Si $a = +\infty$: on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ ssi

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ \ x \geq M \Rightarrow f(x) \geq K$$

Dans ce cas, on note $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Définitions analogues en $-\infty$.

Remarque : En termes de voisinages,

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{ ssi } \forall K \in \mathbb{R}, \ \exists V \text{ voisinage de } a, \ \forall x \in I \cap V, \ \ f(x) \geq K}$$

c) **Définitions unifiées en termes de voisinages.**

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \ \text{ ssi } \ \forall W \text{ voisinage de } l, \ \ \exists V \text{ voisinage de } a, \ \ \forall x \in I \cap V, \ f(x) \in W$$

d) **Théorème de composition des limites.**

Prop : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$, $l \in \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f(I) \subset J$ (ainsi, $g \circ f : I \to \mathbb{R}$).
On suppose $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$. Alors $\lim_a g \circ f = l$.

dem : Soit W un voisinage de l. Il existe un voisinage V de b tel que $\forall y \in V \cap J$, $g(y) \in W$. Et il existe un voisinage U de a tel que $\forall x \in U \cap I$, $f(x) \in V$. Pour $x \in U \cap I$, $f(x) \in V \cap J$, d'où $g(f(x)) \in W$. D'où le résultat.

Cas particulier : Si f est continue (en a) et g continue (en $b = f(a)$), alors $g \circ f$ est continue (en a).

Important : $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a ssi $f(a + h)$ tend vers l lorsque h tend vers 0.
(en effet, on compose d'une part $h \longmapsto a + h$ et $x \longmapsto f(x)$, et d'autre part $x \longmapsto x - a$ et $h \longmapsto f(a + h)$).

Cas particulier : Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.
En effet, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Remarque : Une suite est un cas particulier de fonction (fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, avec $a = +\infty$).

4. Caractérisations séquentielles (= par les suites)

a) **Propriété fondamentale :** $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ssi

pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

dem : Le sens direct résulte de la composition des limites. Supposons maintenant que $f(x)$ ne tend pas vers l lorsque x tend vers a. On suppose par exemple $l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ (les autres cas se traitent de façon analogue).
Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in I$ tel que $|x - a| \leq \alpha$ et $|f(x) - l| > \varepsilon$. En prenant $\alpha = \frac{1}{n+1}$, on construit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I vérifiant $|u_n - a| \leq \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, mais la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l. D'où le résultat par contraposition.

Caractérisation de la continuité par les suites. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ ssi pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

b) *Critères de divergence.*

Pour prouver qu'une fonction diverge, il suffit de trouver une suite extraite divergente ou deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes.

Exemple : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$ diverge. En effet, $\lim_{k\to+\infty} u_{2k} \neq \lim_{k\to+\infty} u_{2k+1}$

Exemple : L'application $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \cos(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0.
En effet, considérons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $v_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$.

Exemple :De même, la fonction $f : x \longmapsto \sin(\ln x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

5. Point adhérent à une partie, adhérence, partie dense

a) Point adhérent, adhérence

Prop et def : Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $x \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes :
i) x est limite d'une suite d'élément de A
ii) x peut être approché arbitrairement près par des éléments de A : $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a \in A, |x - a| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas, on dit que x est adhérent à A, et on note $x \in \overline{A}$. L'ensemble $\overline{A}$ est appelé adhérence de A.

Remarque : a est adhérent à A ssi A rencontre tout voisinage (élémentaire) de a.

Important : Par extension, on propose souvent : A n'est pas majorée ssi $+\infty$ est adhérent à A.
En effet, les assertions suivantes sont équivalentes :
i) $+\infty$ est limite d'une suite d'élément de A ; ii) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists\, x \in A, x \geq M$.

b) Partie dense

Prop et def : *Une partie A est dense* ssi tout réel est adhérent à A. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Tout réel est limite d'une suite d'éléments de A.
ii) Pour tout réel x et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $|x - a| \leq \varepsilon$.
iii) A rencontre tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$: Pour tous $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $a \in]x, y[$.

Remarque : : Soient f et g définies et continues sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f et g coïncident sur une partie J dense dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire $\forall x \in J \ \ f(x) = g(x)$).
Alors f et g sont égales. En effet, tout réel x est limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J.
On a alors $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(u_n)$ et de même pour g. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, \ f(u_n) = g(u_n)$, alors $f(x) = g(x)$.

6. Approximation par un multiple de $\alpha > 0$

a) *Prop* : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\alpha \leq x < (n+1)\alpha$. De plus, $n = E(\frac{x}{\alpha})$.

Corollaire : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, $x = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

b) *Exemples de parties denses*

Prop : Soit A une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

i) $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in A, na \in A$: autrement dit, A est stable par passage aux multiples.

ii) $\inf(A \cap \mathbb{R}_+^*) = 0$: autrement dit, A contient des réels positifs arbitrairement petits.

Alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exemple : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}+\sqrt{2}\mathbb{Z}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Pour le second cas, on utilise $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{2}-1)^n = 0^+$.

c) *Ecriture décimale des nombres réels*

L'ensemble des décimaux est dense dans $\mathbb{R}$ et tout réel s'écrit $x = n + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{a_k}{10^k}$, avec $a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}$

Remarque : $y_p = \dfrac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} = n + \sum_{k=1}^{p} \dfrac{a_k}{10^k}$ est l'approximation déciùale de x par défaut à 10^{-p} près.
Par exemple, si $x = \pi$, on a $y_2 = 3.14$ et $y_4 = 3.1415$

La suite réelle $(y_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et on a $\forall p \in \mathbb{N}$, $y_p \leq x < y_p + \frac{1}{10^p}$.

La suite de chiffres $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est jamais stationnaire en 9, car $0.99999.... = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10}\frac{1}{1-9/10} = 1.0000...$

7. Propriété de la borne supérieure

a) **Propriété fondamentale de l'ensemble des nombres réels :**

Toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure (sup = le plus petit des majorants).

Remarque : Pour une partie $A \subset \mathbb{R}$ non majorée, il est logique de poser $\sup A = +\infty$.

Caractérisation : $\alpha = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, \alpha - \varepsilon < x \leq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \text{ majorant de } A \\ \alpha \text{ adhérent de } A \end{cases}$

Remarque : A admet un plus grand élément ssi $(\sup A) \in A$, et dans ce cas $\sup A = \max A$.

b) **Important**. On a : $\sup A \leq m$ ssi m majorant de A, c'est-à-dire $\forall x \in A, x \leq m$.

c) *Exemple de propriétés* : $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$; $\sup(-A) = -\inf A$

En effet, $\sup(A) + \sup(B)$ majorant de $A+B$.
Il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans A et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans B telles que $a_n \to \sup A$ et $b_n \to \sup B$. D'où $a_n + b_n \to \sup(A) + \sup(B)$.

d) **Parties convexes de** $\mathbb{R}$. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

En effet, on a toujours $A \subset [\inf A, \sup A]$, et lorsque A est convexe, on montre que $]\inf A, \sup A[\subset A$.
On en déduit que A est l'un des 4 intervalles dont les bornes sont $\inf A$ et $\sup A$.

8. Théorème de la limite monotone, suites adjacentes, propriété des segments emboités

a) *Théorème de la limite monotone* :

i) Toute suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ (elle converge ssi elle est majorée).
ii) Toute fonction croissante $f : [a, b[$ tend en b^- vers $\sup_{[a,b[} f$.
Ainsi, toute fonction monotone admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite (si cela a un sens).

Remarque : Ainsi, si f est croissante, on a en tout point intérieur $\lim_{x\to x_0, x<x_0} f \leq f(x_0 \leq \lim_{x\to x_0, x>x_0} f$.

b) *Suites adjacentes. Prop et def* : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et si $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$, alors les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent, et ont même limite $L \in \mathbb{R}$.

Ainsi, $([u_n, v_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de segments emboités et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[u_n, v_n] = \{L\}$, où $L = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n$.

9. Distance à une partie, point adhérent, point intérieur

a) *Def* : Soit A non vide. On définit la distance de x à A par $d(x,A) = \inf\{|x-a|,\, x \in A\}$.

Prop : La fonction $x \longmapsto d(x,A)$ est 1-lipchitzienne.

b) *Important* : x est adhérent à A ssi $d(x,A) = 0$.

c) *Def* : On dit que x est intérieur à A ssi il existe $\alpha > 0$ tel que $[x-\alpha, x+\alpha] \subset A$.

Autrement dit, x est intérieur à A ssi $d(x,B) > 0$, où $B = \mathbb{R} \setminus A$ est le complémentaire de A.

Donc x est intérieur à A ssi x n'appartient pas à l'adhérence de B.

10. Passage à la limite des inégalités larges, parties fermées, parties ouvertes

a) **Passage à la limite des inégalités larges**. Si $\forall x,\ f(x) \geq 0$ et si f admet une limite en a, alors $\lim_a f \geq 0$.

Remarque : Ici, on suppose l'existence de la limite. Ne pas confondre avec les propriétés de pincement.

b) **Parties fermées.** *Def* : Une partie F de $\mathbb{R}$ est fermée ssi elle est stable par passage à la limite : $F = \overline{F}$.
Autrement dit, F est fermée ssi pour toute suite convergente d'éléments de F, la limite appartient aussi à F.

Remarque : Pour prouver qu'une partie est fermée, on montre que tout point adhérent $x \in \overline{F}$ appartient à F.

Exemple : Les intervalles $[a,b]$, $[a,+\infty[$ sont fermés.

Remarque : Une partie fermée F non vide et majorée admet un maximum.

Passage à la limite dans un fermé (généralisation de a)) :
Si $\forall x,\ f(x) \in F$ et si f admet une limite en a, alors $\lim_a f \in F$.

c) **Parties ouvertes.** On dit qu'une partie A est ouverte ssi tout point $x \in A$ est intérieur à A.

Prop : A est ouverte ssi son complémentaire $B = E \setminus A$ est fermée.

d) *Prop* : Une réunion arbitraire d'ouverts est un ouvert, une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Remarque : De même, une intersection arbitraire de fermés est un fermé.

e) *Remarque culturelle* : On peut montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'intervalles ouverts disjoints.
Comme chacun de ces itnervalles contient au moins un nombre rationnel, alors la réunion est finie ou dénombrable.

Propriété des fonctions continues sur un intervalle

1. Image réciproque d'une partie fermée par une fonction continue

Prop : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Les ensembles $\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in [a,b] \mid f(x) = 0\}$ sont des fermés.
En effet, si $f(x_n) \geq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$, alors $l \in [a,b]$ et $f(l) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \geq 0$.
Conséquence : Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ admet au moins un zéro, alors f admet un plus petit zéro.

Remarque culturelle : Si F est fermé et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f^{-1}(F) = \{x \in I \mid f(x) \in F\}$ est un fermé relativement à I : toute suite d'éléments de $f^{-1}(F)$ convergeant dans I converge vers un élément de $f^{-1}(F)$.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

a) *Prop* : Si f est continue sur $[a,b]$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte par f.
Corollaire : L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Exemple : Si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, f admet un point fixe (car $g = f - \mathrm{Id}$ change de signe sur $[0,1]$).

Remarque : De façon générale, le TVI sert à la localisation des zéros (cf par exemple méthode par dichotomie).

Remarque (*difficile*) : Toute application continue et injective sur un intervalle est strictement monotone.

En effet, sinon, il existerait une pente positive et une pente négative, donc une pente nulle (car on peut passer continûment de la pente positive à la pente négative en faisant varier continûment les extrémités).

3. Compacité

a) *Prop* : Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes :
Ainsi, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, f est bornée et il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \sup f$.

Corollaire (avec le TVI) : L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

b) *Exemples.*

Prop : Toute fonction f de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ est lispchiztienne.

Preuve : En effet, f' est continue donc bornée sur le segment $[a, b]$, donc f est lispchiztienne.

Prop : (i) Toute fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et convergente en $+\infty$ est bornée sur $[0, +\infty[$.

(ii) Si de plus $f(0) \geq \lim_{+\infty} f$, alors f atteint son maximum sur $[0, +\infty[$.

Preuve :
(i) f converge en $+\infty$ donc est bornée sur un voisinage $[M, +\infty[$ de $+\infty$. Et f est bornée sur le segment $[0, M]$.

(ii) Si $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq f(0)$, alors $f(0) = \sup f$.
Sinon, il existe x_0 tel que $f(x_0) > \lim_{+\infty} f$, donc il existe $x_1 \geq x_0$ tel que $\forall x \in [x_1, +\infty[$, $f(x) < f(x_0)$.
La restriction de f à $[0, x_1]$ atteint son sup, noté M, et on a $\forall x \geq x_1$, $M \geq f(x_0) \geq f(x)$. Donc $M = \sup_{[0,+\infty[} f$.

4. Théorème de la bijection

Prop : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone.
Alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$, qui est un intervalle et la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.

Important : si $I = [a, b[$ et f strictement croissante, alors $J = [f(a), L[$, où $L = \lim_{x\to b^-} f(x)$.

Exemple : $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue comme réciproque de $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$.

Exemple : L'application $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[\ x \longmapsto x^3 - x$ est continue et strictement croissante.
De plus, $f(1) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc f est une bijection continue de $[1, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.
Et f^{-1} est une bijection continue de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. En particulier, $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$.

Remarque : En fait, une application strictement monotone $f : I \to \mathbb{R}$ est continue ssi $f(I)$ est un intervalle.

5. Approximations par des fonctions en escaliers, définition de l'intégrale

a) *Prop* (*admise*) : Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escaliers φ telles que $\sup(|f - \varphi|) \leq \varepsilon$.

b) *Sommes de Riemann pour des subdivisions régulières* : $\int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k,n})$, où $x_{k,n} = a + k\frac{b-a}{n}$.

c) *Cas général* : Les sommes de Riemann pour une subdivision arbitraire $(x_0, ..., x_n)$ de $[a, b]$ sont de la forme :
$S = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\theta_k)$, avec $\theta_k \in [x_{k-1}, x_k]$. On a $S = \int_a^b \varphi$, avec φ en escaliers, et $\forall x \in]x_{k-1}, x_k[$, $\varphi(x) = f(\theta_k)$.
$\Delta = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})$ est appelé le pas de la subdivision.
On admet que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\left|S - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon$ pour toute subdivision dont le pas Δ est assez petit.

Remarque : Si f est M-lipschitzienne, on a $\left|S - \int_a^b f\right| \leq \sum_{k=1}^n M(x_k-x_{k-1})^2 \leq \Delta \sum_{k=1}^n M(x_k-x_{k-1}) = \Delta M\ (b-a)$.