Valeurs moyennes

On se place dans un espace vectoriel réel E (de dimension finie), par exemple $E = \mathbb{R}^p$.

1) Valeurs moyennes

a) *Définition* **:** Soient des vecteurs $x_1, ..., x_n \in E$.

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0$ non tous nuls. La valeur moyenne des x_k pondérés par a_k est

$$y = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \ x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$$

Remarque : On peut toujours se ramener au cas où $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$ en considérant $\beta_k = \dfrac{\alpha_k}{\sum_{j=1}^n \alpha_j}$.

Exemple : En probas, $E(X) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$ est la valeur moyenne des x_k pondérés par $P(X = x_k)$.

b) *Propriété d'associativité* (culturel)

Exemple : La valeur moyenne G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1), (C, 1)$ est la valeur moyenne de $(J, 2)$ et $(C, 1)$, où J est le milieu de $[A, B]$, c'est-à-dire la valeur moyenne de $(A, 1)$ et $(B, 1)$.

De façon générale, la valeur moyenne des $(x_{ij}, \alpha_{ij})_{i,j}$ est la valeur moyenne des (y_i, β_i), où y_i est la valeur moyenne des $(x_{ij}, \alpha_{ij})_j$ et où $\beta_i = \sum_j \alpha_{ij}$.

c) *Théorème de Gauss-Lucas* (culturel) : Soit $P(X) = \lambda(X - z_1)...(X - z_n) \in \mathbb{C}[X]$ non nul.

Les racines de P' sont des valeurs moyennes (pondérées) des racines de P.

En effet, on a $\dfrac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{X - z_k}$. Soit z une racine de P' distincte des racines de P.
Alors $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{z - z_k} = 0$, donc $\sum_{k=1}^n \dfrac{z - z_k}{|z - z_k|^2} = 0$, d'où $z = \dfrac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \ z_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k}$, où $\alpha_k = \dfrac{1}{|z - z_k|^2} > 0$.

2) Parties convexes

a) *Segments*

Le segment $[x, y]$ est l'ensemble des $\lambda x + (1 - \lambda)y$, avec $\lambda \in [0, 1]$.

Autrement dit, $[x, y]$ est l'ensemble des valeurs moyennes pondérées de x et y,

c'est-à-dire l'ensemble des $z = \dfrac{\alpha x + \beta y}{\alpha + \beta}$, où $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ et $\alpha + \beta > 0$.

Remarque : Soit $z \in [x, y]$. Alors z valeur moyenne des points pondérés $\left(x, \dfrac{y - z}{y - x}\right)$ et $\left(y, \dfrac{z - x}{y - x}\right)$.

En effet, $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ équivaut à $\lambda = \dfrac{y - z}{y - x}$, et on a bien $\lambda \in [0, 1]$.

Remarque : D'un point de vue cinématique, $[x, y] = \{x + t(y - x),\ t \in [0, 1]\}$.

L'application $\varphi : [0, 1] \to [x, y] \quad t \longmapsto x + t(y - x)$ est une bijection affine.

b) *Parties convexes*

Def : On dit que $\mathcal{C} \subset E$ est convexe ssi $\forall (x,y) \in \mathcal{C}^2$, $[x,y] \subset \mathcal{C}$.

Prop : Une intersection de parties convexes est convexe.

Prop : (hors-programme) $\mathcal{C}$ est convexe ssi $\mathcal{C}$ est stable par moyennisation, c'est-à-dire

$$\forall n \geq 1,\ \forall x_1, ..., x_n \in \mathcal{C},\ \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \geq 0 \text{ non tous nuls, } \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k\ x_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} \in \mathcal{C}$$

Preuve : ($\Rightarrow$) Par récurrence et associativité des valeurs moyennes, on se ramène au cas $n = 2$.

Par exemple, $\dfrac{x+y+z}{3} = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) + \dfrac{1}{3}\ z$.

c) *Enveloppe convexe* (culturel).

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. L'enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ est la plus petite partie convexe de E contenant $\mathcal{A}$.

Il y a deux façons de la construire :

- Conv($\mathcal{A}$) est l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$.

- Conv($\mathcal{A}$) est l'ensemble des moyennes pondérées de points de $\mathcal{A}$.

Exemple : Conv($\{A, B\}$) est le segment $[AB]$, Conv($\{A, B, C\}$) est l'intérieur du triangle ABC (côtés compris).

3) Parties convexes de $\mathbb{R}$

Prop : Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Preuve : Les intervalles sont convexes. Récirpoquement, soit $C \subset \mathbb{R}$ convexe.

On peut supposer C non vide, et poser $\alpha = \inf(C) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta = \sup(C) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

On va montrer que $C =]\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$ ou $[\alpha, \beta]$. Il suffit de prouver $]\alpha, \beta[\subset C \subset [\alpha, \beta]$.

- L'inclusion $C \subset [\alpha, \beta]$ est immédiate car α minorant de C et β majorant de C.

- Soit $z \in]\alpha, \beta[$. Il existe $x \in C$ tel que $\alpha \leq x < z$ et il existe $y \in C$ tel que $z < y \leq \beta$.

Ainsi, $z \in [x, y] \subset C$, car C est convexe. On en conclut qu'on a bien $]\alpha, \beta[\subset C$.

4) Du discret au continu : valeur moyenne d'une fonction pondérée par une fonction positive

a) *Définition* **:** Soient $f : [a,b] \to E$ et $\boxed{\omega : [a,b] \to \mathbb{R}^+}$ continues par morceaux, avec $\int_a^b \omega(t)\ dt > 0$.

Alors $y = \dfrac{\int_a^b f(t)\ \omega(t)\ dt}{\int_a^b \omega(t)\ dt}$ est la valeur moyenne des $f(t)$ pondérés par $\omega(t)$.

b) *Formule de la moyenne* (hors-programme)

Prop : Soient $f : [a,b] \to E$ continue et $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}_+$, avec $\int_a^b \omega(t)\ dt > 0$.

On pose $y = \dfrac{\int_a^b f(t)\ \omega(t)\ dt}{\int_a^b \omega(t)\ dt}$. Alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f(c)$.

Preuve : Par Weierstrass, il existe $m = \min f$ et $M = \max f$.

On a $\forall t \in [a,b]$, $m\ \omega(t) \leq f(t)\ \omega(t) \leq M\ \omega(t)$, car $\omega(t) \geq 0$.

Donc $m \int_a^b \omega(t)\ dt \leq \int_a^b f(t)\ \omega(t)\ dt \leq M \int_a^b \omega(t)\ dt$, c'est-à-dire $m \leq y \leq M$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

5) Théorème de Cesàro

a) *Prop* : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle (ou complexe). On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n u_k}{n}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

Preuve : On suppose ici $L \in \mathbb{R}$. On va se ramener au cas $L = 0$.

- On suppose $L = 0$. On utilise une preuve par pincement avec ε.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$.

On a donc $\forall n \geq n_0$, $|v_n| \leq \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0} |u_k| + \sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k|}{n} \leq \dfrac{A}{n} + \dfrac{n-n_0}{n}\varepsilon$, où $A = \sum_{k=1}^{n_0} |u_k|$.

Pour $n \geq n_1$ assez grand, $\dfrac{A}{n} \leq \varepsilon$. On en déduit que $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, $|v_n| \leq 2\varepsilon$.

On peut donc rendre v_n arbitrairement petit en prenant n assez grand. Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

- On suppose $L \neq 0$.

Avec $u_n = L + u'_n$, on a $v_n = L + v'_n$, où $v'_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n u'_k}{n} \to 0$ car $\lim_{n\to+\infty} u'_n = 0$.

Remarque : La propriété est vraie aussi pour $L = +\infty$.

Pour $M \in \mathbb{R}$, on a alors $u_n \geq M$ pour n assez grand, d'où on déduit $v_n \geq M - 1$ pour n assez grand.

Remarque : *Cas continu* : Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$, alors $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt = 0$.

b) *Extension à d'autres pondérations*

Si $\sum \alpha_n = +\infty$, avec $\alpha_n \geq 0$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^n \alpha_k u_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_k} = L$.

Exemple : Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^n 2^{k-n} u_k = 2L$.

En effet, on a : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^n 2^k u_k}{\sum_{k=0}^n 2^k} = L$. Et on conclut en utilisant $\sum_{k=0}^n 2^k \sim_{+\infty} 2^{n+1}$.

Remarque : La propriété se généralise à des pondérations plus générales (paramétrées par n) :

On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^n \alpha_{k,n} u_k}{\sum_{k=1}^n \alpha_{k,n}} = L$ pourvu que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_{k,n}}{\sum_{k=1}^n \alpha_{k,n}} = 0$.

6) Pondérations continues convergeant vers un Dirac

a) *Exemple* : Intuitivement, pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\int_0^1 t^n\, f(t)\, dt}{\int_0^1 t^n\, dt} = f(1)$.

b) *Prop* : Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ vérifiant :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, ρ_n est une fonction positive et $\int_a^b \rho_n(t)\, dt = 1$.

(ii) Pour tout $\alpha > 0$, $\lim_{n\to+\infty} \int_{a+\alpha}^b \rho_n(t)\, dt = 0$

Alors pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, \rho_n(t)\, dt = f(a)$.

Preuve abrégée : $\int_a^b f(t)\, \rho_n(t)\, dt - f(a) = \int_a^b g(t)\, \rho_n(t)\, dt$, où $g(t) = f(t) - f(a)$.

On coupe l'intégrale en deux : $\left|\int_a^b g(t)\, \rho_n(t)\, dt\right| \leq \int_\alpha^{a+\alpha} |g(t)|\, \rho_n(t)\, dt + \int_{a+\alpha}^b |g(t)|\, \rho_n(t)\, dt$.

Donc $\left|\int_a^b g(t)\ \rho_n(t)\ dt\right| \leq \sup_{t\in[a,a+\alpha]} |g(t)| + \sup |g(t)| \times \int_{a+\alpha}^b \rho_n(t)\ dt$.

Or, il existe $\alpha > 0$ assez petit tel que $\sup_{t\in[a,a+\alpha]} |g(t)| \leq \varepsilon$.

De plus, $\lim_{n\to+\infty} \int_{a+\alpha}^b \rho_n(t)\ dt = 0$. Donc $\left|\int_a^b g(t)\ \rho_n(t)\ dt\right| \leq \varepsilon + \varepsilon$ pour n assez grand.

b) *Cas des probabilités*

Prop : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles telles que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(X_n) = \mu$

(ii) $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$

Alors pour toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(\mu)$$

Remarque : On dit parfois que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un Dirac en μ.

Remarque : En fait, on peut templacer (i) par : $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \mu$.

Preuve : $E(f(X_n)) - f(\mu) = E(f(X_n) - f(\mu))$.

On a donc $|E(f(X_n)) - f(\mu)| \leq E(|f(X_n) - f(\mu)|) \leq kE(|X_n - \mu|) \leq k\sqrt{E((X_n-\mu)^2)} = k\sqrt{V(X_n)}$.

Donc on a bien $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) - f(\mu) = 0$.

Prop : La propriété est vraie aussi pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en μ et bornée sur $\mathbb{R}$.

On pose $Y_n = |f(X_n)) - f(\mu)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x - \mu| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(\mu)| \leq \varepsilon$.

Lorsque $|X_n - \mu| \leq \alpha$, on a donc $Y_n \leq \varepsilon$.

Lorsque $|X_n - \mu| > \alpha$, on a de façon directe $Y_n \leq 2M$, où $M = \sup |f|$.

Pour se ramener à ces cas, on écrit

$$Y_n = Y_n\ 1_{A_n} + Y_n\ 1_{\overline{A_n}}$$

où A_n est l'événement : $|X_n - \mu| \leq \alpha$.

On en déduit $E(Y_n) \leq \varepsilon\ P(A_n) + 2M\ P(\overline{A_n}) \leq \varepsilon + 2M\ P(\overline{A_n})$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} P(\overline{A_n}) = 0$ car par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $P(|X_n - \mu| > \alpha) \leq \dfrac{V(X_n)}{\alpha^2}$.

On en déduit que $E(Y_n) \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand.

Comme 2ε est arbitrairement petit, $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(\mu)$.