Théorème de Cesàro

◀ *Prop* : $\boxed{\text{Soit } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite réelle. On pose } v_n = \dfrac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} = \dfrac{u_1+...+u_n}{n} \text{ moyenne des } u_k, \text{ avec } 1 \leq k \leq n}$.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

Remarque : La réciproque est fausse : Avec $u_n = (-1)^{n-1}$, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ (car $v_{2k} = 0$ et $v_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$).

Preuve : L'idée est d'évaluer la somme en la coupant en deux.

Cas particulier : $L = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n| \leq \varepsilon$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$|v_n| \leq \frac{\sum_{k=1}^{n_0} |u_k|}{n} + \frac{\sum_{k=n_0+1}^{n} |u_k|}{n} \leq \frac{A}{n} + \frac{(n-n_0)}{n}\varepsilon \leq \frac{A}{n} + \varepsilon, \text{ où } A = \sum_{k=1}^{n_0} |u_k| \text{ ne dépend pas de } n$$

Il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1$, $\dfrac{A}{n} \leq \varepsilon$. Donc $\forall n \geq \max(n_0, n_1)$, $|v_n| \leq 2\varepsilon$.

Comme ε est arbitraire, on a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Cas général : On se ramène au cas particulier en considérant la suite $(u_n - L)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0.

En effet, par linéarité de la moyenne, la moyenne des $(u_k - L)$ avec $1 \leq k \leq n$ est $(v_n - L)$.

Donc $\lim_{n\to+\infty}(v_n - L) = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

◀ *Corollaire* : $\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = L, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = L}$.

Preuve : On applique le théorème de Cesàro à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = a_n - a_{n-1}$.

Ainsi, on a $v_n = \dfrac{a_n - a_0}{n}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = L$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n} = L$.

◀ **Application aux suites récurrentes** : Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 > 0$ et $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

On vérifie aisément que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne peut converge, donc tend vers $+\infty$.

On note que $(x_{n+1})^2 - (x_n)^2 = 2 + \dfrac{1}{(x_n)^2}$, donc $\lim_{n\to+\infty}\ (x_{n+1})^2 - (x_n)^2 = 2$.

Il résulte du théorème de Cesàro que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(x_n)^2}{n} = 2$, c'est-à-dire $x_n \sim \sqrt{2n}$.

◀ *Complément* : **Théorème de Cesàro pour les fonctions (continues)** :

$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x f(t)\ dt}{x} = L}$. *Remarque* : $\dfrac{\int_0^x f(t)\ dt}{x}$ est la valeur moyenne de f sur $[0, x]$.

La preuve consiste aussi à se ramener au cas $L = 0$ et à couper l'intégrale en deux.

◀ *Complément* : On peut prouver le théorème de Cesàro sans utiliser le pincement avec ε, mais en utilisant une coupure indexée sur n : Supposons $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est a fortiori bornée. Posons $M = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$

Pour $1 \leq \alpha(n) \leq n$, on a $|v_n| \leq \dfrac{\alpha(n)}{n} M + \left(1 - \dfrac{\alpha(n)}{n}\right) \sup_{k>\alpha(n)} |u_k|$.

On choisit $\alpha(n)$ tel que $\lim_{n\to+\infty} \alpha(n) = +\infty$ et $\alpha(n) = \mathfrak{o}_{+\infty}(n)$, par exemple $\alpha(n) = \sqrt{n}$.

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha(n)}{n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \sup_{k>\alpha(n)} |u_k|$. $= 0$. Par pincement, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Théorème de pincement "avec ε"

Prop : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\begin{cases} \forall n \geq p,\ |u_n| \leq \varepsilon + \alpha_n \\ \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0 \end{cases}$

Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\forall n \geq p,\ |u_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \alpha_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq q$, $\alpha_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc $\forall n \geq \max(p,q)$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Remarque : Dans le cas de la preuve du théorème de Cesàro, α_n est de la forme $\frac{A}{n}$.

Remarque : Un raisonnement *faux* consiste à écrire : " $\lim_{n\to+\infty} |u_n| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ ".

En effet, on ne peut utiliser le théorème de passage à la limite, puisqu'on ne sait pas que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite. La notation $\lim_{n\to+\infty} v_n$ ne peut être utilisée que si on sait que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.