Sommes et produits. Exemples

1) Propriétés élémentaires

a) Changements de variables

Exo : Exprimer $\sum_{k=p}^{q} x_k$ et $\sum_{k=1}^{m} x_{m-k}$ en fonction de sommes de la forme $\sum_{k=0}^{n} x_{k+r}$.

Exo : Avec x_k réels, on pose $\sum_{k=0}^{n} i^k\ x_k = \alpha + i\beta$. Exprimer α et β par des sommes indéxées de 0 à m.

b) Factorisation

Exo : Simplifier $2 \times 4 \times 6 \times ... \times (2n)$.

Exo : On admet $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Calculer $A = \sum_{n \text{ pair}}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$, $B = \sum_{n \text{ impair}} \dfrac{1}{n^2}$ et $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

2) Sommes télescopiques

Exo : Calculer $\sum_{k=p}^{q} \dfrac{1}{k(k+1)}$. En déduire que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$.

Exo : On considère $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ croissante vérifiant $f(1) = 0$ et $f(2k) - f(k) = k$. Calculer $f(2^p)$. Majorer $f(n)$.

Exo : Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$. Calculer $\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)$ en exprimant cos à l'aide d'un quotient de deux sinus.

3) Sommes géométriques

Exo : Calculer $\sum_{k=p}^{q} x^k$ et $\sum_{k=p}^{+\infty} x^k$ lorsque $|x| < 1$.

Exo : Pour $|a| > |b|$, montrer que $\dfrac{1}{a-b} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{b^n}{a^{n+1}}$. En déduire $\forall t > 0$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)} t$.

Exo : Sommes des puissances des racines p-ième de l'unité (dans $\mathbb{C}$).

Qoit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{z \in U_p} z^n$. Montrer que $S_n = p$ si $n \in p\mathbb{Z}$ et $S_n = 0$ sinon.

Exemple : Avec $j = e^{2i\pi/3}$, on a : $1 + j^n + j^{2n} = 3$ si 3 divise n, et 0 sinon.

Exo : Calculer $\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$.

Exo : Soient des polynômes $A, B, P \in K[X]$. Montrer que $A - B$ divise $P(A) - P(B)$.

Exo : Calculer $\sum_{k=p}^{q} \cos(k\theta)$.

4) Coefficients binomiaux

Exo : Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner un équivalent de $\binom{n}{p}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exo :On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) u_{n-1}$. Exprimer u_n en fonction de u_0.

Variante (intégrales de Wallis) : $\omega_n = \left(\dfrac{2n-1}{2n}\right) \omega_{n-2}$. Exprimer ω_n en fonction de ω_0 et ω_1.

Exo : Calculer $A_n = \sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{k \text{ impair}} \binom{n}{k}$.

Exo : Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$. Exprimer S_n en fonction de 4^n et de $\binom{2n}{n}$.

5) Formules dérivées

Principes généraux : Si $F(x) = \sum a_k x^k$, alors $F'(x) = \sum k a_k x^{k-1}$ et $F(x) + F(-x) = 2\sum_{k \text{ pair}} a_k x^k$.

Exo : Calculer $A = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}2^k$

Exo : Calculer $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k+1}2^{-k}$.

Exo : En utilisant $F(x) + F(jx) + F(j^2x)$, calculer $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + ...$

6) Sommations par paquets et principe de Fubini

Exo : Calculer $\sum_{A\subset\{1,2,...,n\}} \operatorname{card} A$.

Exo : Calculer $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} \binom{j}{i}\binom{n}{j}x^i y^j$.

Exo : On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $(\mathcal{P})$ ssi $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$.

Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, tout produit de matrices vérifiant $(\mathcal{P})$ vérifie $(\mathcal{P})$.

7) Développement d'un produit de sommes (= distributivité)

Principe général : On développe en sommant les produits obtenus en prenant un terme dans chaque somme.

Exo : Montrer que $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, où $c_k = \sum_{i=\max(0,k-m)}^{\min(n,k)} a_i b_{k-i}$.

Exo : Exprimer $(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)$ par une somme indexée par les parties A de $\{1, 2, ..., n\}$.

Exo : Justifier directement que $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k y^{n-k}$.

Exo : Montrer que $(1 + x)(1 + x^2)...(1 + x^{(2^{n-1})}) = \sum_{k=0}^{N} x^k$, où $N = 2^n - 1$.

8) Exemples

Exo : Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \sin(\pi(1 + \sqrt{2})^n) = 0$.

Indication : $a_n = (1 + \sqrt{2})^n$ et $b_n = (-\sqrt{2})^n$ vérifient $a_n + b_n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Exo : Calculer $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 + \lfloor \log n \rfloor}{n(n+1)}$.

Remarque : $1 + \lfloor \log n \rfloor$ est le nombre de chiffres de l'écriture de n en base 2. Ici, $\log n = \dfrac{\ln n}{\ln 2}$.

Solution : On regroupe les termes selon la valeur de $p = 1 + \lfloor \log n \rfloor$.

On a $p = 1 + \lfloor \log n \rfloor$ ssi $p - 1 \leq \log n < p$, donc ssi $2^{p-1} \leq n < 2^p$.
Donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1 + \lfloor \log n \rfloor}{n(n+1)} = \sum_{p=1}^{+\infty} p\left(\sum_{n=2^{p-1}}^{2^p-1} \dfrac{1}{n(n+1)}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty} p\left(\dfrac{1}{2^{p-1}} - \dfrac{1}{2^p}\right)$, car $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

On en déduit que $S = \sum_{p=1}^{+\infty} \dfrac{p}{2^p}$, donc $S = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{(1-1/2)^2} = 2$, car $\sum_{p=1}^{+\infty} p x^{p-1} = \left(\dfrac{1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.