Sommes télescopiques

Formule fondamentale $\boxed{\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1}-u_k)=u_{q+1}-u_p}$.

Corollairee souvent utile (suite vue comme série) : $\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = L, \text{ alors } \sum_{n=1}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=L-u_0}$.

Exemple : $\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\ln(n+1)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$.

Exemple : Avec $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$, on a donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$.

Exemple : $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2})=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})-\frac{1}{2}(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2})$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$.

Produits télescopiques : $\boxed{\prod_{k=p}^{q}\dfrac{u_{k+1}}{u_k}=\dfrac{u_{q+1}}{u_p}}$. *Exemple* : $\prod_{k=p}^{q}\dfrac{k+1}{k}=\dfrac{q+1}{p}$.

Sommes géométriques

1) Formule fondamentale $\boxed{\sum_{k=0}^{n}x^k=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ si } x\neq 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n}x^k=n+1 \text{ si } x=1}$

Remarque : Si $|x|<1$, il vaut mieux écrire $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Remarque : Somme tronquée : $\boxed{\sum_{k=p}^{q}x^k=x^p+x^{p+1}+...+x^q=x^p(1+x+...+x^{q-p})}$ $=x^p\frac{x^{q-p+1}-1}{x-1}$ (si $x\neq 1$).

Généralisation : $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}x^k y^{n-1-k}=\dfrac{x^n-y^n}{x-y}}$ (si $x\neq y$). On se ramène au cas précédent en considérant $r=\dfrac{x}{y}$.

Par exemple, $x^2+xy+y^2=\frac{x^3-y^3}{x-y}$ (pour $x\neq y$), car $x^2+xy+y^2=y^2(1+r+r^2)=y^2\frac{r^3-1}{r-1}$.

Exemple : Les racines de $X^8-X^6+X^4-X^2+1=\frac{X^{10}+1}{X^2+1}$ sont les $e^{i(2k+1)\pi/10}$, avec $k\in\{-5,-4,-2,-1,0,1,3,4\}$.

Exemple : Si a divise b, 2^a-1 divise 2^b-1 ; si m est impair et $x\in\mathbb{N}$, $x+1$ divise $x^m+1=x^m-(-1)^m$.
Et si 2^n-1 est premier, alors n est premier. Et si 2^n+1 est premier, alors n est une puissance de 2.

Exemple : On a $U_p=\{1,\omega,...,\omega^{p-1}\}$. Alors $\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^k)^n=\begin{cases} p \text{ si } \omega^n=1, \text{ c'est-à-dire } n \text{ multiple de } p \\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$

Exemple : On pose $S_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}$. Pour $\theta\neq 0\ [2\pi]$, la suite $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
En effet, on a $S_n(\theta)=\dfrac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}$, donc $|S_n(\theta)|\leq\dfrac{2}{|1-e^{i\theta}|}$.

2) Développements en série géométrique $\boxed{\text{Si } |x|<1, \sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}}$

Principe : $\boxed{\text{On développe } \dfrac{1}{x-\lambda} \text{ en série entière en } \dfrac{x}{\lambda} \text{ si } |x|<|\lambda|, \text{ et en } \dfrac{\lambda}{x} \text{ si } |x|>|\lambda|}$

Exemple : On a $\dfrac{1}{2+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{2^{n+1}}$.

Exemple : $\dfrac{1}{a-e^{i\theta}}=\begin{cases} -\sum_{n=0}^{+\infty}a^n e^{-i(n+1)\theta} \text{ si } |a|<1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty}a^{-n}e^{in\theta} \text{ si } |a|>1\end{cases}$

Exemple : Pour $x>0$, $\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}=2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-(2n+1)x}$ (et en intégrant sur $[0,+\infty[$, $\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$).

3) Sommes trigonométriques

Exemple : On calcule $\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta)=\mathrm{Re}(S_n)$, où $S_n=\sum_{k=1}^{n}e^{ik\theta}=e^{i\theta}\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\theta}=e^{i\theta}\dfrac{e^{in\theta}-1}{e^{i\theta}-1}$ si $e^{i\theta}\neq 1$.

Rappel : $\boxed{e^{i\theta}-1=2i\sin(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}}$ et $e^{i\theta}+1=2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\theta/2}$. En effet, $e^{i\theta}-1=e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})$.

Donc $S_n=\sum_{k=1}^{n}e^{in\theta}=e^{i\theta}\dfrac{2i\sin(n\theta/2)e^{in\theta/2}}{2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}}=\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{i(n+1)\theta/2}$ si $e^{i\theta}\neq 1$.

Formule générale :

On a $\sum_{k=p}^{q} \exp(ik\theta+\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\sin((q-p+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \exp\left(i\dfrac{p+q}{2}\theta+\alpha\right) \text{ si } \theta \neq 0\ [2\pi] \\ (q-p+1)\ f(\alpha) \text{ si } \theta = 0\ [2\pi] \end{cases}$

Remarque : $(q-p+1)$ est le nombre de termes de la somme et $\frac{p+q}{2}\theta+\alpha$ est la valeur moyenne des $k\theta+\alpha$ lorsque k décrit $[\![p,q]\!]$. De plus, $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin((q-p+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = q-p+1$, donc le cas $\theta = 0\ [2\pi]$ est obtenu par passage à la limite $\theta \to 0$ du cas $\theta \neq 0\ [2\pi]$ (ce qui est cohérent avec la continuité de $\theta \longmapsto \sum_{k=p}^{q} f(k\theta+\alpha)$).

Exemple : $S_n = \sum_{k=-n}^{n} \cos(2k\theta) = \frac{\sin((2n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$ si $\theta \neq 0\ [\pi]$, et $S_n = 2n+1$ si $\theta = 0\ [\pi]$.

Formule du binôme

Formule du binôme : $\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$

Cas particulier : $\boxed{(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x + ... + \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}x^k + ...}$

Exemple : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n - 2^n$.

Formules dérivées

1) Formules obtenues par dérivation ou intégration

Principe : Si $\boxed{S(x) = \sum a_k x^k}$ pour tout $x \in U$ (intervalle ouvert), alors $\boxed{\sum k a_k x^k = xS'(x)}$.

a) *Exemples liés à la formule du binôme.*

Exemple : On a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n = P(x). \text{ Donc } \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k = xP'(x) = nx(1+x)^{n-1}}$.

De même $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k = x^2 P''(x) + xP'(x)$.

Remarque anecdotique : On pourrait aussi calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k$ en utilisant $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

Exemple : On a $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{n}{2} 2^n$ et $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \int_0^1 (1+x)^n\ dx = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exemple : On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$ et $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.
En effet, on considère la dérivée partielle en x de $P(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

b) *Exemples liés aux sommes géométriques (et plus généralement aux développements en série).*

Exemple : Pour $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.

2) Sommes extraites (en prenant un terme sur deux par exemple)

a) *Principe* : Si $S(x) = \sum a_k x^k$, alors $\boxed{\sum_{k \text{ pair}} a_k x^k = \frac{1}{2}(S(x) + S(-x))}$.

Exemple : $\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} = \frac{1}{2}\sum_k \binom{n}{k}(1+(-1)^k) = \frac{1}{2}(2^n + 0^n) = 2^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$ (et 1 sinon).

Exemple : Pour $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$, donc $\text{ch}(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$.

b) *Généralisation* : On a par exemple, $1 + j^k + j^{2k} = 3$ si $k \equiv 0\ [3]$, et $1 + j^k + j^{2k} = 0$ sinon.

Principe : $S(x) = \sum a_k x^k$, alors $\boxed{\sum_{k \text{ multiple de } 3} a_k x^k = \frac{1}{3}(S(x) + S(jx) + S(j^2x))}$.

Exemple : $\sum_{j\geq 0} \binom{n}{3j} = \frac{1}{3}(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n) = \frac{1}{3}(2^n + 2\cos(n\pi/3)) \sim \frac{1}{3}2^n$.

Exemple : Pour $z \in \mathbb{R}$ on a $\sum_{j\geq 0} \frac{1}{(3n)!} x^{3n} = \frac{1}{3}(e^x + 2\,\text{Re}(e^{jx})) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

c) *Sommation avec l'expression conjuguée.*

Exemple : $(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n$ et $(3+\sqrt{2})^n + (3-\sqrt{2})^n$ sont des entiers pairs.

Exemple : $\text{Re}((x+iy)^n) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} y^{2k} x^{n-2k}$.
En particulier, (polynôme de Tchebytchev), $\cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} (-1)^k \binom{n}{2k} (1-\cos^2\theta)^k (\cos\theta)^{n-2k}$.

Utilisation de la factorisation dans les termes pairs

Principe : $\boxed{\text{Si on sait calculer } \sum_{k \text{ pair}} a_k \text{ en fonction de } \sum_k a_k, \text{ on sait calculer } \sum_{k \text{ impair}} a_k \text{ et } \sum_k (-1)^k a_k}$.

1) Produits des entiers impairs $\boxed{1 \times 3 \times 5 ... \times (2n-1) = \dfrac{(2n)!}{2 \times 4 \times 6 \times .... \times (2n)} = \dfrac{(2n)!}{2^n (n!)}}$.

Exemple : On a $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, avec $c_n = \frac{1 \times 3 \times 5 ... \times (2n-1)}{2^n} = \frac{(2n)!}{4^n (n!)}$.

2) Sommes des puissances d'entiers pairs et impairs $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)^\alpha} = \dfrac{1}{2^\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Exemple : On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Quelques formules classiques

Somme du petit Gauss : $\boxed{1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2} n(n+1)}$.

Décomposition du morceau de sucre : $\boxed{xy - x'y' = x(y - y') + (x - x')y'}$.

Exemple : Si x, x', y, y' entiers et si $x \equiv x' \ [n]$ et $y \equiv y' \ [n]$, alors $xy \equiv x'y' \ [n]$.

Identité de Lagrange : $\boxed{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad - bc)^2 + (ac + bd)^2}$.

Remarque : Dans $\mathbb{C}$, cette identité correspond à $|a + ib| \, |c + id| = |(a + ib)(c + id)|$.

Exemple : L'ensemble des $\{a^2 + b^2, \, (a, b) \in \mathbb{N}^2 \text{ (ou } \mathbb{Z}^2)\}$ est stable par multiplication.

Sommations doubles : principe de Fubini

Cas simple fondamental : $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} = \sum_{j \in I} \sum_{i \in J} a_{ij}$. Par exemple, $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right)$.

Autrement dit, on regroupe les termes de $\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}$ soit par rapport à i soit par rapport à j.

Cas général : Pour $K \subset I \times J$, alors $\sum_{(i,j) \in I} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J \text{ tel que } (i,j) \in K} a_{ij}$.

ATTENTION au cas où les bornes de la seconde somme varient : $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{ij} \right)$.

En effet, $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \text{ tel que } 1 \le j \le i \le n} a_{ij}$: à j fixé, i varie de j à n. Donc on obtient $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{ij} \right)$.

Exemple : $\sum_{0 \le i \le j \le n} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1} - 1$.

Exemple : Soit $Q = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, et $\omega = e^{2i\pi/p}$ racine p-ième de l'unité.

On vérifie aisément (somme géométrique) que $\sum_{k=0}^{p-1} \omega^{kj} = p$ si j est un multiple de p, et 0 sinon.

Soit un polynôme $Q(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$.

Alors $\sum_{z \in U_n} Q(z) = \sum_{k=0}^{p-1} Q(\omega^k) = \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{n} a_j \omega^{kj} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{p-1} a_j \omega^{kj} = p(a_0 + a_p + a_{2p} + a_{3p} + ... + a_{E(n/p)p})$.

Développement d'un produit de sommes (distributivité)

Principe : On développe un produit de sommes en sommant tous les produits obtenus en prenant un terme dans chaque facteur.

Important : $\boxed{\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j}$. Par éxemple, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right)$.

En particulier, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j$.

Exemple : $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + x^2(a + b + c) + x(ab + ac + bc) + abc$.

$$\boxed{\textit{Exemple :} \ (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)...(1 + x^{(2^{p-1})}) = \sum_{(\varepsilon_0, .., \varepsilon_{p-1}) \in \{0,1\}^p} x^{\varepsilon_0 + \varepsilon_1 2 + ... + \varepsilon_{p-1} 2^{p-1}} = \sum_{k=0}^{2^p - 1} x^k = \dfrac{x^{(2^p)} - 1}{x - 1}}.$$

$$\boxed{\textit{Formule du binôme :} \ (x + y)^n = (x + y)...(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{i+j=n} \binom{n}{i} x^i y^j = \sum_{i+j=n} \dfrac{n!}{i! j!} \, x^i y^j}$$

où $\binom{n}{k}$ est le nombre de façons de choisir les k facteurs où on sélectionne x.

Remarque culturelle : Formule du trinôme : $(x + y + z)^n = \sum_{i+j+k=n} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} x^i y^j z^k = \sum_{i+j+k=n} \dfrac{n!}{i! j! k!} \, x^i y^j z^k$.

Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

1) Fonctions symétriques élémentaires (HORS-PROGRAMME)

a) *Définition.* Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$.

Pour $0 \leq k \leq n$, on note σ_k la somme des $\binom{n}{k}$ produits de k termes λ_i : $\boxed{\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} ... \lambda_{i_k}}$.

En particulier, $\boxed{\sigma_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ et } \sigma_n = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n}$. On a aussi $\sigma_0 = 1$ et $\sigma_2 = \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$.

Les σ_k sont appelés fonctions symétriques élémentaires de $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

b) *Remarque culturelle* : Toute fonction polynomiale de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ qui est symétrique en $\lambda_1, ..., \lambda_n$, c'est-à-dire globalement invariante par permutation des λ_i, s'exprime comme un polynôme en les σ_k, avec $0 \leq k \leq n$.

Exemple : Posons $S_2 = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2$. Alors $S_2 = (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2$.

2) Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé

a) Par distributivité, $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)...(X - \lambda_n) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - ... + (-1)^n \sigma_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \sigma_k X^{n-k}$.

Exemple : $\begin{cases} (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta \\ (X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma) = X^3 - (\alpha+\beta+\gamma)X^2 + (\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma \end{cases}$

b) Soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n = a_n (X - z_1)...(X - z_n)$.

On a $\boxed{z_1 + z_2 + ... + z_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \text{ et } z_1 z_2 ... z_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}}$.

Remarque : La moyenne (isobarycentre) des racines est $\dfrac{1}{n}(z_1 + z_2 + ... + z_n) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$.

3) Cas particulier de certains polynômes du second degré

Exemple : Cas des polynômes $P = X^2 + ax + 1$, avec a réel, de racines complexes λ et μ

- Si $|a| > 2$, les racines λ et μ sont réelles distinctes. Comme $\boxed{\lambda\mu = 1}$, on peut supposer $0 < |\lambda| < 1 < |\mu|$.

Plus précisement, si $a > 0$, alors on a $0 < \lambda < 1 < \mu$.

- Si $|a| < 2$, les racines λ et μ ne sont pas réelles, donc sont conjuguées (puisque a est réel) et de module 1.

Remarque : En fait, il est souvent utile de poser $a = 2\cos\theta$ ou $a = \pm 2 \operatorname{ch} t$ selon que $|a| \leq 2$ ou $|a| \geq 2$.

$\boxed{\text{Les racines de } P = X^2 + 2(\cos\theta)x + 1 \text{ sont } e^{i\theta} \text{ et } e^{-i\theta}}$. En effet, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1$ et $e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$.

Les racines de $P = X^2 + 2(\operatorname{ch} t)x + 1$ sont e^t et e^{-t}.

4) Transformation algébrique par translation et passage à l'inverse

a) *Polynôme translaté.*

Considérons $P = X^n - aX^{n-1} + bX^{n-2} + ... \in \mathbb{C}[X]) = \prod_{k=1}^n (X - z_k)$.

Les racines de $Q(X) = P(X + \alpha) = \prod_{k=1}^n (X + \alpha - z_k)$ sont les $\boxed{z_k - \alpha}$.

b) *Polynôme miroir.*

Soit $P = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n = a_n \prod_{k=1}^n (X - z_k)$, avec a_0 et a_n non nuls.

Alors $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X}) = a_n + a_{n-1} X + ... + a_1 X^{n-1} + a_0 X^n = a_n \prod_{k=1}^n (1 - z_k X)$.

Donc les racines de Q sont les $\dfrac{1}{z_k}$, c'est-à-dire les inverses dans racines de P, et $Q = a_0 \prod_{k=1}^n \left(X - \dfrac{1}{z_k}\right)$.

Les fonctions symétriques de Q sont liées à celles de P : Ainsi, $\sum_{k=1}^n \dfrac{1}{z_k} = \dfrac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} = \dfrac{(-1)^{n-1} a_1 / a_n}{(-1)^{n-1} a_0 / a_n} = -\dfrac{a_1}{a_0}$.