

1) Formules usuelles

a) Cardinal d'un produit cartésien

- $\text{card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$
- nombre de p -uplets de $\llbracket 1, n \rrbracket$
- nombre d'applications de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$: $\text{card}(\mathcal{F}(F, E)) = (\text{card } E)^{\text{card } F}$
- nombre de parties de E : $\text{card}(P(E)) = 2^{\text{card } E}$
- nombre de tirages ordonnés et avec remise de p boules numérotées dans une urne de n boules
- nombre de placements de p boules numérotées dans n boîtes

b) Arrangements $A_{p,n}$

- nombre de p -uplets injectifs de E : il y a $n(n-1)\dots(n-p+1)$ p -uplets injectifs
- nombre de tirages ordonnés et sans remise de p boules numérotées dans une urne contenant n boules
- nombre de placements de p boules numérotées dans n boîtes contenant au plus une boule

c) Permutations $n!$

- nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$
- nombre de numérotations des éléments d'un ensemble de cardinal n

d) Combinaisons $\binom{n}{p}$

- nombre de parties de cardinal p dans un ensemble E de cardinal n
- nombre de façons de choisir p entiers distincts dans $\llbracket 1, n \rrbracket$
- tirages simultanés de p boules numérotées dans une urne contenant n boules
- tirages non ordonnés et sans remise de p boules numérotées dans une urne contenant n boules
- nombre de n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$ vérifiant $x_1 + \dots + x_n = p$
- nombre d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

e) Combinaisons $\binom{n+p-1}{p}$

- nombre de tirages non ordonnés et avec remise de p boules dans une urne contenant n boules
- nombre de placements de p boules indiscernables dans n boîtes
- nombre de n -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant $x_1 + \dots + x_p = n$
- nombre d'applications croissantes de $\llbracket 1, p \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

2) Méthodes de dénombrement et exemples

Pour déterminer le cardinal d'un ensemble fini, il y a plusieurs outils non exclusifs les uns des autres

- on explicite une bijection avec un ensemble dont on connaît le cardinal
- on partitionne l'ensemble en des parties dont on connaît le cardinal.
- principe des bergers

a) *Exo* : On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de v.a. indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre p .

On note N_r l'indice de la r -ième variable valant 1. Calculer $P(N_r = n)$.

Solution : On a $N_r = n$ lorsque $X_n = 1$ et que exactement $(r - 1)$ valeurs parmi $X_1, \dots, X_{n-1}$ valent 1.

Il y a $\binom{n-1}{r-1}$ configurations possibles. Chacune de ces configurations a une probabilité $p^r(1-p)^{n-r}$.

Donc $P(N_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$.

b) *Exo* : Déterminer le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Solution : On choisit l'unique élément de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ admettant deux antécédents, puis les deux antécédents, puis la bijection entre les éléments restants.

Donc le nombre de surjections vaut $n \times \binom{n}{2} \times (n-2)! = \frac{1}{2} n n!$

c) *Exo* : Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et des entiers $p_1, \dots, p_r$ tels que $n = p_1 + \dots + p_r$.

Montrer que le nombre de partitions ordonnées en r parties de cardinaux $p_1, \dots, p_r$ vaut $\frac{n!}{p_1! \dots p_r!}$. *Solution* : Il y a

$\binom{n}{p_1}$ choix, $\binom{n-p_1}{p_2}$ pour la deuxième, etc.

Donc au total $\binom{n}{p_1} \binom{n-p_1}{p_2} \binom{n-p_1-p_2}{p_3} \dots \binom{p_r}{p_r} = \frac{n!}{p_1! \dots p_r!}$ partitions ordonnées.

d) *Exo* : Déterminer le nombre d_n de façons de partitionner un ensemble de $n = 2m$ éléments en un ensemble de m paires.

Solution : On compte le nombre de partitions ordonnées, puis on divise par $m!$

Il s'agit donc de $\frac{1}{m!} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2} \binom{n-4}{2} \dots \binom{2}{2} = \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

e) *Exo* : Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les décompositions $n = a_1 + \dots + a_r$, avec $r \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$.

On a $c_0 = 1$. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de décompositions vaut $c_n = 2^{n-1}$.

Solution : En choisissant $a_r = k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on se ramène à une décomposition de $n - a_r$.

Donc pour $n \geq 1$, $c_n = \sum_{k=1}^n c_{n-k}$. Pour $n \geq 2$, on a donc $c_n = c_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-1-k} = 2c_{n-1}$.

Comme $c_1 = 1$, on obtient $c_n = 2^{n-1}$ par récurrence immédiate.

Autre argument : En associant à chaque décomposition $X = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_{r-1}\}$, on obtient une bijection de l'ensemble des décompositions sur l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

La bijection réciproque associée à $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ la décomposition $n = x_1 + (x_2 - x_1) + \dots + (n - x_p)$.

f) *Exo* : On note a_n le nombre de parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne contenant pas deux éléments consécutifs.

Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2 à coefficient constants.

Solution : On note E_n l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne contenant pas deux éléments consécutifs.

On a $E_n = E'_n \sqcup E''_n$ en distinguant les parties qui contiennent n et celles qui ne contiennent pas n .

E'_n est l'ensemble des parties de la forme $A \sqcup \{n\}$, où $A \in E_{n-2}$. Et on a $E''_n = E_{n-1}$.

On obtient donc $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. On a aussi $a_0 = a_1 = 1$.