Entiers naturels

◂ **Propriété de bon ordre** : Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exo 1) (♣) Soit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Montrer que pour tout $x \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n-1} \leq x < u_n$.

Principe de récurrence : Supposons $\mathcal{P}(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
En effet $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n) \text{ faux } \}$ est vide, car sinon, $m = \min A$ vérifie $m \in \mathbb{N}^*$ et $m-1 \in A$.

Exo 2) (♣) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(x+nT) = f(x)$.

Commentaire : Le cas $n \in \mathbb{Z}^-$ se déduit du cas $n \in \mathbb{N}$, lequel se prouve par récurrence simple.

Exo 3) (♣) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ est produit de nombres premiers. *Remarque* : Idem pour les polynômes.

Exo 4) (♣) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan^{(n)}(x) > 0$.
b) On considère $f(x) = \arctan(x)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = \lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x) = 0$.

Important : Dans certains cas, on prouve une propriété plus forte qui, elle, se prouve par récurrence.

Exo 5) (♣) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$ tels que $f^{p-1}(x) \neq 0$ et $f^p(x) = 0$. Montrer que $(x, f(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre.

Important : On peut rédiger soit en utilisant une récurrence soit en utilisant la propriété de bon ordre.

Exo 6) (♣) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est absolument monotone ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.
Montrer que si f et g sont absolument monotones, alors $f \circ g$ est absolument monotone.

Indication : Utiliser la formule de Leibniz appliquée à $g' \times (f' \circ g)$.

Commentaire : On montre par récurrence forte que $(f \circ g)^{(n)} \geq 0$, mais il faut noter qu'on applique l'hypothèse de récurrence non pas à f et g, mais à f' et g. Autrement dit, on prouve pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: "Pour *toutes* fonctions f et g absolument monotones, $(f \circ g)^{(n)} \geq 0$ ".

Principe de Fermat : Il n'existe pas de suite d'entiers naturels strictement décroissante.
En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers. Il existe $u_m = \min\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît, on a $\forall n \geq m$, $u_n = u_m$.

Exo 7) Montrer que la suite $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = 1 + f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ si $n \in \mathbb{N}^*$ est bien définie.

Remarque : En informatique, on dit que l'algorithme "termine" (pas de suite infinie d'itérations).

◂ **Définitions de suites**

Exo 8) Soit $A \subset \mathbb{R}$ non majorée. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dans A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Exo 9) Montrer que toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ admet une suite extraite croissante (tendant vers $+\infty$).

◂ **Arithmétique et division euclidienne**

Exo 10) Déterminer les entiers admettant un nombre impair de diviseurs (dans $\mathbb{N}$).

Exo 11) Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

Exo 12) a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que m et $m+1$ sont premiers entre eux (= sans facteur premier commun).
b) En considérant $(n!) + 1$, montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exo 13) Rappel **:** $a \equiv b\ [p]$ ssi p divise $(a-b)$, c'est-à-dire ssi a et b ont mêmes restes modulo p.
Montrer que si $a \equiv b\ [p]$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a^n \equiv b^n\ [p]$.

Exo 14) (♣) Montrer que si $a = bq + r$, alors $\text{pgcd}(a,b) = \text{pgcd}(r,b)$. D'où *l'algorithme d'Euclide.*

Ecriture d'un entier en base 2

Exo 15) a) (♣) Montrer que tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique $n = \sum_{k=0}^{r} u_k\, b^k$, avec $0 \leq u_k < b$ et $u_r \neq 0$.

b) (♣) En déduire que pour tout x réel et $p \in \mathbb{N}$, on a : $(1+x)(1+x^2)...(1+x^{(2^{p-1})}) = \sum_{k=0}^{2^p-1} x^k$.

◀ **Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers**

Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ irréductible est racine de $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où les $a_k \in \mathbb{Z}$, alors p divise a_0 et q divise a_n.
En effet, $\sum_{k=0}^{n} a_k p^k q^{n-k} = 0$, donc p divise $a_0 q^n$. Comme p est premier avec q^n, p divise a_0. De même, q divise $a_n p^n$.

Exo 16) Montrer que les racines du polynôme $P = X^3 - 3X + 1$ sont irrationnelles.

Indication : Montrer que si $x = \frac{p}{q}$, avec $\text{pgcd}(p,q) = 1$, est racine de P, alors $p^3 - 3pq^2 + q^3 = 0$ donc $p = q = \pm 1$.

(♣) Plus généralement, montrer que les racines rationnelles d'un polynôme unitaire à coefficients entiers sont nécessairement des entiers. Ainsi $\sqrt{m}$, qui est racine du polynôme $X^2 - m$, est rationnel ssi m carré entier.

◀ **Principe des tiroirs** : Etant donnés n éléments d'un ensemble fini de cardinal $p < n$, deux au moins sont égaux.

Exo 17) (♣) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etant donnés $n+1$ réels $x_0, ..., x_n$ dans $[0,1]$, il existe $i \neq j$ tels que $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.
Proposer un algorithme en PYTHON qui étant donnée une liste de réels $(x_0, ..., x_n)$ dans $[0,1[$ renvoie (i,j).

Exo 18) (♣) Soit $f : E \to E$, où E est fini, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang. Que dire si f est bijective (= permutation) ?

Exo 19) (★) a) Soit $q \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que q divise $10^m - 1$.

Indication : Montrer qu'il existe $0 \leq i < j \leq n$ tels que q divise $10^i - 10^j$.

b) En déduire que le développement décimal de $r = \frac{p}{q} \in [0,1[$ est périodique de période m.

Indication : Noter que le développement de x est m-périodique ssi $10^m x - x$ est un entier naturel.

Remarque culturelle : Plus généralement, on peut montrer qu'un nombre est rationnel ssi son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang (c'est-à-dire ssi il existe m tel que $10^m x - x$ est un nombre décimal).

◀ **Partie entière d'un nombre réel**

Exo 20) (♣) *Approximation d'un réel x par un multiple de $\alpha > 0$.* Soit $\alpha > 0$.

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|x - n\alpha| \leq \alpha$.

Remarque : Si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, le quotient de la division euclidienne de a par b est $n = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, ce qui revient à approcher a par défaut par un multiple de b.

Exo 21) (♣) Expliciter la plus grande puissance de 2 qui est inférieure ou égale à n.

Remarque : Ne pas confondre avec la plus grande puissance de 2 qui divise n.

Exo 22) a) (♣) Expliciter le nombre de multiples de p compris entre 1 et n.
b) Montrer que l'exposant de p (premier) dans la décomposition de $n!$ vaut $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + ...$

Indications : a) On obtient $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$; b) Il est conseillé de faire un schéma (en prenant $p = 2$ par exemple).