Conseils de rédaction et schémas de raisonnements

“ *On trouve par l'intuition, on prouve par la logique.* ” H. Poincaré (*La valeur de la Science*)

1) Rédaction

- Ne pas utiliser $\exists$ dans la rédaction : Si on connaît l'existence d'un objet, on lui donne un nom afin de l'exploiter dans la suite. Par exemple, supposons $y \in \operatorname{Im} f$, où $f : E \to F$, c'est-à-dire $\exists\, x \in E,\ y = f(x)$.

On rédige : “ Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ ”, et dans la suite, on peut utiliser x.

- Ne pas utiliser $\Rightarrow$: Un raisonnement est une suite de déductions. On utilise les expressions “donc”, “d'où”, ...

Ne pas confondre “A donc B ” et “$A \Rightarrow B$ ”.

En effet, “A donc B ” signifie “A est vrai donc B est vrai ” et “$A \Rightarrow B$ ” signifie “si A est vrai alors B est vrai ”.

- Pour prouver $\forall x \in X,\ A(x) \Rightarrow B(x)$ par un raisonnement direct, on rédige de la façon suivante :

“ Soit $x \in X$ tel que $A(x)$ ” et on montre que $B(x)$ est vrai.

Exo 1) a) Exprimer la négation formelle de $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$.

b) Soit A une partie de $[0, +\infty[$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A,\ x < \varepsilon$ ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, x \in A,\ x \leq \varepsilon$

Quelle est la propriété ainsi définie ? (on pourra faire intervenir la notion de borne inférieure de A, notée $\inf A$).

Solution : a) $\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \alpha > 0,\ \exists\, x \in \mathbb{R},\ (|x-a| \leq \alpha$ et $|f(x) - f(a)| > \varepsilon)$.

b) Supposons (ii). Soit $\varepsilon > 0$. Par (ii), il existe $x \in A$ tel que $x \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Donc $x < \varepsilon$, et (i). Réciproque immédiate.

2) Raisonnements par l'absurde

Principe : Pour prouver C, on suppose C faux et on montre qu'on aboutit à une contradiction.

Pour prouver $A \Rightarrow B$ par contraposition, on montre que si B est faux, alors A est faux.

On utilise un raisonnement par l'absurde (ou par contraposition) dans l'un des deux cas suivants :

- La conclusion s'exprime à l'aide de négations (par exemple, montrer qu'un nombre est irrationnel).

- La conclusion est la preuve de l'existence d'un élément qu'on ne peut pas en fait expliciter.

On montre qu'il ne peut pas ne pas exister un tel élément (existence formelle).

C'est notamment le cas lorsque la conclusion est une disjonction de la forme (A ou B). On suppose par l'absurde que A et B sont faux, ce qui évite à expliciter dans quels cas on a A et dans quels cas on a B. D'ailleurs, noter que par exemple l'assertion ($x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$ ou ... ou $x_n = 0$) équivaut à l'assertion $(\exists\, i \in \{1, 2, ..., n\},\ x_i = 0)$.

Exo 2) Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ ssi $(a, b) = (c, d)$.

Exo 3) On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exo 4) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in [0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Commentaire : Un raisonnement direct consiste à construire c. Un raisonnement par l'absurde prouve l'existence formelle de c. Souvent, dans certains cas, seule l'existence formelle peut être prouvée : par exemple, il existe un chiffre apparaissant une infinité de fois dans le développement décimal de $\pi = 3.1415926535...$

Solution : *Exo 2)* Supposons $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Alors $(a - b) = \sqrt{2}(d - d)$.

Si on avait $d - d \neq 0$, alors on aurait $\sqrt{2} = \frac{a-b}{d-b} \in \mathbb{Q}$. Donc $b = d$, et on en conclut $a = c$.

Exo 3) L'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par $x \longmapsto x + \frac{1}{x}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (car $u_{n+1} < u_n$).

Par le théorème de la limite monotone, il existe $L = \lim_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. De plus, $L \geq u_0 > 0$.

Si L était réel, on aurait par passage à la limite $L = L + \frac{1}{L}$, ce qui est absurde, donc $L = +\infty$.

Exo 4) Supposons par l'absurde que f' ne s'annule pas. Alors, par le TVI, f' est de signe constant non nul donc f est strictement monotone sur l'intervalle $[0, +\infty[$, ce qui contredit $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Raisonnements par récurrence

- De préférence ne pas utiliser un raisonnement par récurrence. Par exemple, la preuve de la somme du petit Gauss $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ ne permet pas de comprendre pourquoi il existe une expression simple de la somme.

- Dans les cas un peu compliqués, il est conseillé de formuler explicitement la propriété qu'on prouve par récurrence sous la forme $\mathcal{P}(n)$: ... la propriété qu'on prouve par récurrence.

- Dans le cas des récurrences simples, on montre $\mathcal{P}(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Dans certains cas, il est plus judicieux au niveau des notations de montrer $\mathcal{P}(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n-1) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$.

- Pour prouver $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ par récurrence forte, on montre $\mathcal{P}(0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\forall k < n, \mathcal{P}(k)) \Rightarrow \mathcal{P}(n)$.

On utilise un raisonnement par récurrence forte lorsque $\mathcal{P}(n)$ ne peut pas se déduire de $\mathcal{P}(n-1)$, mais se déduit de $\mathcal{P}(k)$, où k est représente un ou plusieurs entiers strictement inférieurs à n. Par exemple, la décomposition en facteurs premiers d'un entier composé $n = ab$ se déduit des décompositions de a et b.

- Pour prouver une propriété de la forme $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P}(n)$, on doit utiliser deux récurrences.

- La récurrence dite descendante consiste pour démontrer $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $\mathcal{P}(k)$ à prouver :
d'une part $\mathcal{P}(n)$ et d'autre part $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k-1)$.

4) Raisonnements par condition nécessaire (analyse-synthèse)

Il s'agit des problèmes où on cherche l'ensemble F des éléments $x \in E$ vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}(x)$.

La partie "analyse" consiste à supposer que $x \in E$ vérifie $\mathcal{P}(x)$ et à montrer que x appartient *nécessairement* à un certain ensemble G. La partie "synthèse" consiste à déterminer parmi les éléments de G ceux qui vérifient $\mathcal{P}(x)$.

Exo 5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les nombres complexes $z \in U$ tels que $z^n = (z+1)^n$.

Exo 6) Déterminer les fonctions y vérifiant $y'(x) = y(-x)$.

Remarque : On peut résoudre de façon analogue l'équation $y'(x) = y(a - x)$, où $a \in \mathbb{R}$ est fixé.

Indication : On montre d'abord que si $y'(x) = y(-x)$, on a *nécessairement* $y''(x) = -y(x)$.

Solution : *Exo 5)* Supposons $z \in U$ tel que $z^n = (z+1)^n$. Alors nécessairement $1 = |z| = |z+1|$.

Donc $z \in \{j, \overline{j}\}$ intersection des cercles de rayon 1 et de centres 0 et -1.

Réciproquement, on a $j + 1 = e^{i\pi/3}$, donc $j^n = (j+1)^n$ ssi $e^{ni\pi/3} = 1$, c'est-à-dire ssi 6 divise n. De même pour $\overline{j}$.

On en conclut qu'il n'y a aucune solution si $n \notin 6\mathbb{N}$, et que les solutions sont j et $\overline{j}$ si $n \in 6\mathbb{N}$.

Exo 6) (Analyse) Supposons $y'(x) = y(-x)$. Alors y' est dérivable et $y''(x) = -y'(-x) = -y(x)$.

Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y(x) = a\cos x + b\sin x$.

(Synthèse) Suppsons $y(x) = a\cos x + b\sin x$. Alors $y'(x) = -a\sin x + b\cos x$.

Comme $(\cos, \sin)$ est libre, on obtient la CNS : $b = a$. Donc les solutions sont les $y(x) = a(\cos x + \sin x)$.

5) Raisonnements par équivalence

- En pratique, on n'utilise les $\Leftrightarrow$ que dans les calculs (par exemple pour passer dans un calcul d'une équation à une équation équivalente).

- De façon générale, pour prouver des propriétés qui sont de la forme (A et B), on sépare les preuves de A et de B (car elles n'ont a priori aucun lien entre elles). C'est le cas des $\Leftrightarrow$ (double implication), des égalités entre ensembles (on montre les deux inclusions), et des questions théoriques d'existence et d'unicité.

- Pour prouver $A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow A_n$, il suffit de démontrer $A_1 \Rightarrow A_2$, $A_2 \Rightarrow A_3$, ..., $A_{n-1} \Rightarrow A_n$ et $A_n \Rightarrow A_1$.

Principes généraux dans les raisonnements

Reformulation

Exo 7) Caractériser les triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

Preuve géométrique : On note A, B, C les points d'affixes e^{ix}, e^{iy}, e^{iz}. Justifier que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$ ssi le centre G du triangle ABC coïncide avec le centre O du cercle circonscrit de ABC (cercle unité), donc ssi ABC est équilatéral.

Preuve algébrique : Avec $a = e^{ix}$, on a $a+b+c = 0$ et par conjugaison $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, donc $\alpha = \frac{b}{a}$ et $\beta = \frac{c}{a}$ vérifient $\alpha + \beta + 1 = 0$ et $\alpha + \beta + \alpha\beta = 0$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = 1$, donc α et β racines de $X^2 + X + 1$, d'où $\{\alpha, \beta\} = \{j, j^2\}$.

Comprendre le phénomène

Pour trouver l'idée ou les idées menant à une démonstration, il faut déterminer les liens entre les hypothèses et la propriété qu'il faut démontrer. Il est souvent intéressant d'examiner d'abord des situations particulières.

Exo 8) Déterminer les polynômes complexes vérifiant $P(X^2) = P(X)^2$.

Indication : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Le polynôme s'écrit sous la forme $P(X) = \lambda X^n + R$.

En développant $P(X)^2 = \lambda^2 X^{2n} + n\lambda X^n R + ...$ et on en conclut $R = 0$ et $\lambda = 1$.

Autre solution : Utiliser : si z racine de P, les racines carrées le sont aussi, donc toutes ses racines 2^p-ième.

Si P admettait une racine non nulle, toutes les racines 2^p-ième de z formeraient un ensemble infini ...

Donc $P(x) = \lambda X^n$, et récirpoquement, λX^n convient ssi $\lambda = 1$.

Expliciter les hypothèses et la propriété à prouver en termes élémentaires

Exo 9) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq \int_0^1 |f'(t)|\ dt$.

Remarque : Une variante un peu plus compliquée est de supposer $\int_0^1 f(t)\ dt = 0$ au lieu de $f(0) = 0$.

Solution : Il s'agit de prouver que $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq \int_0^1 |f'(t)|\ dt$.

Or, on a $f(x) = \int_0^x f'(t)\ dt$, d'où $|f(x)| \leq \int_0^x |f'(t)|\ dt = \int_0^1 |f'(t)|\ dt$.

Notions importantes en logique

Inversion des quantificateurs et notion de majoration uniforme

L'assertion $\exists y \in Y,\ \forall x \in X,\ \mathcal{P}(x,y)$ implique $\forall x \in X,\ \exists y \in Y,\ \mathcal{P}(x,y)$, mais la réciproque peut être fausse.

De nombreux problèmes d'Analyse consiste à trouver un majorant indépendant d'un paramètre.

Exo 10) : Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n e^{ik\theta}$. Montrer que pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Autrement dit, il s'agit de trouver un majorant de $S_n(\theta)$ indépendant de n.

Existe-t-il un réel M tel que $\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |S_n(\theta)| \leq M$?

Solution : $\left|\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}\right| = \left|\frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1}\right| = \left|\frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right|$ si $\theta \neq 0\ [2\pi]$, donc $(S_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\frac{2}{|e^{i\theta}-1|}$.
Comme $\lim_{\theta\to 0, \theta\neq 0} S_n(\theta) = n+1$, on ne peut pas trouver un majorant uniforme en θ et en n.

Notions d'existence et unicité

Commentaire : Dans les problèmes théoriques, on est généralement amené à séparer les preuves de l'existence et de l'unicité. L'existence formelle se prouve par un raisonnement par l'absurde. Pour prouver l'unicité, on considère deux éléments vérifiant la propriété, et on montre qu'ils sont égaux. Dans les problèmes pratiques, on prouve souvent en même temps l'existence et l'unicité ou bien on explicite un élément qui vérifie la propriété et on prouve que tout élément vérifiant la propriété est nécessairement égal à cet élément.

Exo 11) : Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$ et $c \neq 0$.
Montrer que l'homographie $h : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}\ \ z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ est bijective.

Exo 12) : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(\sqrt{2}-1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Exo 13) : *Polynômes de Bernoulli.*
a) Montrer qu'il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $B_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 B_n(t)dt = 0$.
b) Montrer que $B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$.

Solution : *Exo 11)* Considérons $h : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}\ \ z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$.
L'application h est bien définie, car $\forall z \neq -\frac{d}{c}$, $cz+d \neq 0$ et que $\frac{az+b}{cz+d} \neq \frac{a}{c}$, car $ad-bc \neq 0$.
Pour montrer que h estbijective, on fixe $y \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, et on montre que l'équation $h(z) = y$ admet une unique solution $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$. Or, on a $h(z) = y \Leftrightarrow (az+b) = y(cz+d) \Leftrightarrow (yc-a)z = (b-dy) \Leftrightarrow z = \frac{b-dy}{yc-a}$.
On vérifie pour conclure que $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Exo 12) Existence : Formule du binôme et $\sqrt{2}^k$ est de la forme 2^q ou $2^q\sqrt{2}$; Unicité : cf exo 1).

Exo 13) a) Les primitives d'un polynôme P sont de la forme $Q + \lambda$, avec Q polynôme.
On a $\int_0^1 (Q+\lambda)(t)\ dt = 0$ ssi $\lambda = -\int_0^1 Q(t)\ dt$. Ainsi, B_{n-1} étant défini, B_n est défini de façon unique.
Donc la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et est unique. *Remarque* : Ici, on prouve directement existence *et* unicité.

b) Il suffit de vérifier que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$ vérifie la propriété caractéristique de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Or, on a bien $C_0 = B_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n' = nB_{n-1}$ et $\int_0^1 C_n(t)\ dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)\ du = 0$.