$\boxed{\text{Oscillateurs}}$

1) Oscillateurs linéaires

a) Sans frottement : $\boxed{(H) : y'' + (\omega_0)^2 y = 0}$, où $\omega_0 > 0$.

Les solutions sont les $y(t) = a\cos(\omega_0 t + b\sin(\omega_0 t) = A\cos(\omega_0 t - \varphi)$, où $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b) Avec frottement : $\boxed{(H) : y'' + \varepsilon y' + (\omega_0)^2 y = 0}$, où $\varepsilon > 0$.

Les solutions complexes sont les $\alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t}$, où λ et μ sont les racines (supposées distinctes) de $z^2 + \varepsilon z + (\omega_0)^2 = 0$.

- *Régime apériodique* : Lorsqu'elles sont réelles, on a $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, car $\lambda + \mu = -\varepsilon < 0$ et $\lambda\mu > 0$.

- *Régime pseudo-périodique* : Sinon, on a $\lambda + \mu = 2\operatorname{Re}\lambda = -\varepsilon < 0$.

Donc les solutions sont $Ae^{-t/\tau}\cos(\Omega_0 t - \varphi)$, avec $\tau = \frac{2}{\varepsilon}$ et $\Omega_0 = \sqrt{(\omega_0)^2 - 4\varepsilon}$ proche de ω_0 lorsque ε est assez petit.

Remarque : τ est appelée période de relaxation : l'amplitude diminue d'un facteur e en passant de t à $t + \tau$.

- Dans tous les cas, on a $\boxed{\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0}$. En effet, si $\lambda \in \mathbb{C}$, $\left|e^{\lambda t}\right| = e^{(\operatorname{Re}\lambda)t} \to 0$ lorsque t tend vers $+\infty$, car $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

2) Oscillateurs linéaires entretenus

a) Sans frottement : $\boxed{(E) : y'' + (\omega_0)^2 y = C\cos(\omega t)}$, avec $C = h\omega^2$, et où $\omega, \omega_0 > 0$.

- Lorsque $\omega \neq \omega_0$, une solution particulière est $y(t) = A\cos(\omega t)$, avec $A = \dfrac{C}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

- Lorsque $\omega = \omega_0$, il y a résonance *au sens mathématique* :

Une solution particulière de $z'' + (\omega_0)^2 z = Ce^{i\omega t}$ est $z(t) = Kte^{i\omega t}$, où $2Ki = C$, c'est-à-dire $K = -\frac{1}{2}iC$.

Donc une solution particulière est $y(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = At\sin(\omega t)$, où $A = \frac{1}{2}C$.

En ajoutant les solutions de (H), on obtient des solutions non bornées.

b) Avec frottement : $\boxed{(E) : y'' + \varepsilon y' + (\omega_0)^2 y = C\cos(\omega t)}$, avec $C = h\omega^2$, et où $\varepsilon > 0$.

On considère l'équation complexe associée $\boxed{(EC) : z'' + \varepsilon z' + (\omega_0)^2 z = Ce^{i\omega t}}$.

Une solution particulière est $\boxed{z(t) = Ke^{i\omega t}, \text{ avec } K = \dfrac{C}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\varepsilon\omega}}$.

En écrivant K sous forme trigonométrique $K = Ae^{-i\varphi}$, on en déduit que (E) admet comme solution particulière

$$\boxed{y(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \text{ avec } A = |h|\,\frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \varepsilon^2\omega^2}}} \text{ et } \tan\varphi = \frac{\varepsilon\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Remarque : On a aussi $y(t) = \operatorname{Re}(z(t)) = (h\omega^2)\operatorname{Re}\left(\dfrac{\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\varepsilon\omega}\right) = (h\omega^2)\dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \varepsilon\omega\sin(\omega t)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \varepsilon^2\omega^2}$.

c) Régime permanent et résonance au sens physique

On considère comme au b) l'équation $(E) : y'' + \varepsilon y' + (\omega_0)^2 y = C\cos(\omega t)$, avec $\varepsilon > 0$.

Les solutions du système homogène $(H) : y'' + \varepsilon y' + (\omega_0)^2 y = 0$ convergent vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.

Ainsi, la différence de deux solutions de (E) convergent vers 0 en $+\infty$.

Autrement dit, toutes les solutions ont le même comportement asymptotique, appelé régime permanent, correspondant à celui de la solution particulière trouvée au b) :

$$y(t) = A\cos(\omega t - \varphi), \text{ avec } A = |h| \frac{\omega^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \varepsilon^2\omega^2}}$$

Lorsque ω est proche de ω_0 et que ε est assez petit, le quotient $\dfrac{A}{|h|}$ est grand (devant 1).

On dit qu'il y a résonance (au sens physique).

Remarque : Pour étudier la fonction $f : \omega \longmapsto \dfrac{A}{|h|}$, on pose $u = \dfrac{\omega_0^2}{\omega^2}$. On a $f(u) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-u)^2 + cu}}$, où $c = \dfrac{\varepsilon^2}{\omega_0^2}$.

La fonction f est maximale lorsque $u \longmapsto (1-u)^2 + cu$ est minimale, c'est-à-dire pour $u = 1 - \frac{1}{2}c$.

Quanf ε est petit, u est proche de 1, et comme prévu, la résonance a lieu pour ω proche de ω_0.

d) Complément mathématique : Cas d'un second membre sous forme polynôme-exponentielle

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et Q un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

On considère l'équation différentielle $\boxed{(E) : az''(t) + bz'(t) + cz(t) = Q(t)e^{\gamma t}}$.

Il existe une solution particulière sous la forme $z(t) = P(t)e^{\gamma t}$.

L'équation (E) s'écrit $(a\gamma^2 + b\gamma + c)P + (2a\gamma + b)P' + 2aP'' = Q$.

Si $a\gamma^2 + 2b\gamma + c \neq 0$, il existe (par dimension) une solution P de même degré que Q.

Siγ est racine simple, c'est-à-dire $a\gamma^2 + 2b\gamma + c = 0$ et $2a\gamma + b \neq 0$, on a $\deg P = 1 + \deg Q$.

Si γ est racine double (et $a \neq 0$), on obtient $\deg P = 2 + \deg Q$.

3) Oscillateurs non linéaires (équation du pendule)

a) L'équation du pendule sans frottement est donnée par $\boxed{(E) : \dfrac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 \sin y = 0}$.

En muliplant par y', et en intégrant, on obtient $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 - \omega^2 \cos y = k}$.

Remarque : En supposant y petit, on obtient $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \omega^2 y^2 \simeq 2k$.

b) Période : Considérons les conditions initiales $y(0) = y_0 \in]0, \pi[$ et $y'(0) = 0$.

Alors $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = \omega^2(\cos y_0 - \cos y)}$.

La période T vérifie donc $\dfrac{1}{4}T = \int_0^{T/4} dt = \int_0^{y_0} \left(\dfrac{dt}{dy}\right) dy$, c'est-à-dire $T = \dfrac{4}{\omega} \int_0^{y_0} \dfrac{dy}{\sqrt{2(\cos y_0 - \cos y)}}$.

c) Equation de Newton : L'équation du pendule est une équation de la forme $y'' + g(y) = 0$.

En muliplant par y', et en intégrant, on obtient $\dfrac{1}{2}(y')^2 + G(y) = k$, ce qui s'écrit aussi $\dfrac{y'}{\sqrt{2k - 2G(y)}} = \pm 1$.

En général, on ne sait pas intégrer directement cette équation. En revanche, on peut tracer le portait de phases : Dans l'espace $(y, y') = (y, z)$, les courbes d'équation $\frac{1}{2}z^2 + G(y) = k$ sont appelées intégrales premières : Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sont donc contenues dans les courbes de niveau de la fonction $H(y, z) = \frac{1}{2}z^2 + G(y)$.