$\boxed{\textbf{Exemples d'équations aux dérivées partielles}}$

1) Cas particuliers fondamentaux

a) *Cas particulier fondamental* :

Soit $f : U \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^1, où U **ouvert convexe** de $\mathbb{R}^2$ (par exemple $U = \mathbb{R}^2$).

$\boxed{\text{Alors } f \text{ vérifie } \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ ssi il existe } g \text{ de classe } C^1 \text{ telle que } f(x,y) = g(y)}$.

Preuve : On fixe y_0. L'ensemble des x tels que $(x, y_0) \in U$ est un intervalle ouvert J.

S'il est non vide, on considère $f_0 : J \to \mathbb{R}\ x \longmapsto f(x, y_0)$.

On a $f_0'(x) = 0$, donc f_0 est constante. La constante dépend de y_0. Ainsi, on obtient $f(x,y) = g(y)$.

Enfin, on a $f(x_0, y) = g(y)$ au voisinage de y_0, où $(x_0, y_0) \in U$.

On en déduit que $g'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, et on en conclut (avec f de classe C^1) que g est de classe C^1.

Le sens réciproque est immédiat.

Remarque : On rédige souvent en indiquant qu'on fixe y et qu'on intègre par rapport à x.

Pour obtenir une constante $g(y)$, il est essentiel que l'intégration se fasse sur un intervalle (ici J).

b) *Corollaire* : Soit $f : U \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2, où U ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.

i) f vérifie $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0}$ ssi il existe g et h de classe C^2 telles que $f(x,y) = g(y) + xh(y)$.

ii) f vérifie $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0}$ ssi il existe g et h de classe C^2 telles que $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

Preuve : ii) Supposons $\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0}$. A y fixé, en intégrant par rapport à x, on obtient $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y)$.

Puis, en intégrant à x fixé par rapport à y, on obtient $f(x,y) = \psi(x) + \phi(y)$.

Réciproquement, si $f(x,y) = g(x) + h(y)$, alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$.

D'autre part, comme f est C^2, alors g et h sont de classe C^2.

c) *Exemple* : Soit $f : U \to \mathbb{R}\ \ (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^2, où U ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$.

f vérifie $\boxed{(E) : \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lambda f(x,y)}$ ssi $f(x,y) = k(y) e^{\lambda x}$.

En effet, en posant $f(x,y) = g(x,y) e^{\lambda x}$, l'équation (E) s'écrit $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0$, c'est-à-dire $g(x,y) = k(y)$.

2) Utilisations de changements de variables

a) *Exemples d'EDP du premier ordre*

Exemple : On considère $\boxed{(E) : \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}}$.

Principe : On effectue un changement de variable $(x,y) \longmapsto (u,v)$ de sorte qu'avec $f(x,y) = g(u,v)$, on a

- Analytiquement, en cherche $x = x(u,v)$ et $y = y(u,v)$, de sorte que $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \lambda \times \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Or $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$, donc $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)$.

Donc on obtient $(E) : \dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$ en prenant $\dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) = -\dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v)$, donc on peut prendre $x(u,v) = u - v$.

On choisit ensuite $y(u,v)$ de sorte à obtenir un changement de variable valide $(x,y) \longmapsto (u,v)$, c'est-à-dire un difféomorphisme de classe C^1. En cherchant un changement de variable affine, on peut prendre $y(u,v) = ax - by$, avec $(a,b) \neq (1,1)$.

- Géométriquement, l'idée est de deviner les lignes de niveau de f (orthogonales au gradient) et de choisir (u,v) de sorte que ces lignes de niveau correspondent aux équations $v = k$ constante.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ssi le gradient est colinéaire au vecteur $(1,1)$. Donc les lignes de niveau sont les droites $x + y = k$.

On considère donc par exemple $v = x + y$ et $u = x$, c'est-à-dire

$$f(x,y) = g(x, x+y) \text{ c'est-à-dire } g(u,v) = f(u, v-u)$$

On a alors $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(u, v-u)$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ ssi $\dfrac{\partial g}{\partial u} = 0$.

Donc les solutions sont les $g(u,v) = \varphi(v)$, c'est-à-dire $f(x,y) = \varphi(y - x)$.

Exemple : On considère $\boxed{(E) : y\dfrac{\partial f}{\partial x} = x\dfrac{\partial f}{\partial y}}$.

On a $y\dfrac{\partial f}{\partial x} = x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ssi le gradient est colinéaire au rayon vecteur (x,y).

Les lignes de niveau sont des cercles, on prend donc par exemple $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On a alors $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(u,v) = -(r\sin\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + (r\cos\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Donc $y\dfrac{\partial f}{\partial x} = x\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ssi $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$, donc ssi $g(r,\theta) = \varphi(r)$, c'est-à-dire $f(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

b) *Exemple d'EDP du second ordre*

Exemple : On considère l'équation de propagation $\boxed{(E) : \dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0}$.

On effectue le changement de variable $g(u,v) = f(t,x)$, avec $\begin{cases} t = u + v \\ x = c(u - v) \end{cases}$ $\begin{cases} 2cu = ct + x \\ 2cv = ct - x \end{cases}$

On a alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ ssi $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, donc ssi $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$.

On en déduit que les solutions de (E) sont les $f(x,t) = \widehat{\varphi}(x + ct) + \widehat{\psi}(x - ct)$.

Remarque : Le changement de variable est lié à : $c^2\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} - c\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \circ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + c\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Généralisation : $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \circ \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$, en distinguant les cas $\lambda \neq \mu$ et $\lambda = \mu$.

Pour $\lambda \neq \mu$, avec $(x,y) = (u + v, \lambda u + \mu v)$, on a $\dfrac{\partial}{\partial u} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial}{\partial v} = \dfrac{\partial}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial}{\partial y}$.