**Recherche d'extrema globaux des fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles**

## Principe de la recherche des extrema

Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}^n$ d'interieur $U$.

Pour déterminer la valeur maximale d'une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ continue sur $A$ et de classe $C^1$ sur $U$, on commence par prouver par un argument de compacité l'existence de $a$ tel que $\sup f(A) = f(a)$.
Autrement dit, on cherche un compact $K$ tel que $\sup f(A) = \sup f(K)$.

Une fois qu'on sait qu'il existe $a \in A$ tel que $\sup f(A) = f(a)$, on cherche à déterminer $a$.

Si $a \in U$, alors $f$ admet en $a$ un maximum local, donc $\operatorname{grad} f(a) = \overrightarrow{0}$, ce qui en pratique conduit à un nombre fini de candidats.

D'autre part, lorsque $A$ n'est pas ouvert, on étudie la fonction $f$ le long de la frontière $\Gamma$ de $A$ (à l'aide généralement d'un paramétrage de $\Gamma$. On trouve alors de nouveaux candidats possibles.

Enfin, on compare les valeurs de $f$ en les différents candidats, et on conclut.

## Exemples de recherches des extrema

**Exemple :** Considérons $f : D \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + \dfrac{1}{4}xy$, où $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Comme $f$ est continue et que $D$ est compact, alors $f$ atteint ses bornes $D$.
Il existe $\Omega = (a, b) \in D$ tel que $\sup_D f = f(\Omega)$.
Si $\Omega$ est intérieur à $D$, alors $\nabla f(\Omega) = 0$, c'est-à-dire $(2a + \frac{1}{4}b, 2b + \frac{1}{4}a) = (0, 0)$, c'est-à-dire $(a, b) = (0, 0)$.
Sinon, $\Omega$ appartient au bord $\Gamma$ de $D$. Or, $\Gamma = \{(\cos t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}\}$.
Donc les valeurs de $f$ sur $\Gamma$ sont les $f(\cos t, \sin t) = 1 + \frac{1}{4}(\cos t)(\sin t) = 1 + \frac{1}{2}\sin(2t)$.
Donc $\sup_\Gamma f = \frac{3}{2}$ et $\inf_\Gamma f = \frac{1}{2}$. Sachant que $f(0, 0) = 0$, on obtient $\sup f = \frac{3}{2}$ et $\inf f = f(0, 0) = 0$.

**Exemple :** Considérons $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad X = (x, y) \longmapsto xy \exp(-x^2 - y^2)$, où $\Delta = ]0, +\infty[^2$.

Comme $\lim_{\|X\| \to +\infty} |f(X)| = 0$ et que $f(1, 1) > 0$, alors $f$ est bornée et atteint sa borne supérieure (en effet, il existe $R$ tel que $\forall \|X\| > R$, $|f(X)| < f(1, 1)$, d'où on déduit $\sup f = \sup_{B(0,R)} f$ ).
Il existe $\Omega = (a, b) \in D$ tel que $\sup f = f(\Omega)$.
Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, alors $\nabla f(\Omega) = 0$, c'est-à-dire $(b - 2a^2 b, a - 2ab^2) = (0, 0)$.
On en déduit que $\sup f = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\sqrt{e}$.
Comme $f(-x, y) = -f(x, y)$, alors $\inf f = -\sup f = -\frac{1}{2}\sqrt{e}$.

**Exemple :** Considérons $f : U \to \mathbb{R} \quad (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 + \dfrac{1}{xy}$, où $U = ]0, +\infty[^2$.

Alors $f$ atteint sa borne inférieure sur $U$, et $\inf f = 2\sqrt{2}$.

Considérons $K = \{(x, y) \in U \mid x^2 + y^2 \leq 3 \text{ et } xy \geq \frac{1}{3}\}$.
$K$ est une partie fermée et bornée, donc compacte. De plus, $K$ contient le point $(1, 1)$.
D'autre part, pour tout $(x, y) \in U \setminus K$, $f(x, y) > f(1, 1)$.
Donc $\inf f = \inf_K f$, qui est atteint un point $\Omega = (a, b) \in K$.
Comme $\Omega$ est intérieur à l'ouvert $U$, alors $\operatorname{grad} f(\Omega) = 0$, c'est-à-dire $(2a - \frac{1}{a^2 b}, 2b - \frac{1}{ab^2}) = (0, 0)$.
On en déduit $a = b$, puis $a = b = 2^{-1/4}$, donc $\inf f = 2\sqrt{2}$.

*Exemple* : Supposons que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1$ et $2\pi$-périodique en $x$ et en $y$.

Comme $f$ est $2\pi$périodique en $x$ et en $y$, alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x - 2n\pi, y - 2m\pi) = f(x, y)$ pour tous $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Or, on peut trouver $n$ et $m$ tels que $x - 2n\pi \in [0, 2\pi[$ et $y - 2m\pi \in [0, 2\pi[$.
On en déduit que $f(\mathbb{R}^2) = f([0, 2\pi]^2)$. On en déduit que $f$ est bornée et atteint ses bornes.
D'autre part, comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, $\operatorname{grad} f$ s'annule en les points où $f$ atteint ses bornes.

**Fonctions de plusieurs variables : Conditions d'extremum local**

On se limite au cas des fonctions à deux variables.

## 1) Matrice Hessienne

On rappelle que $\operatorname{grad} f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$.

On note $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p} \in S_p(\mathbb{R})$ : en effet, par le th de Schwarz, $H_f(a)$ est symétrique.

## 2) Développement limité à l'ordre 2

Alors pour tout $a \in U$, on a $f(a+h) = f(a) + \langle \operatorname{grad} f(a), h\rangle + \dfrac{1}{2}\langle h, u(h)\rangle + \mathfrak{o}\left(\|h\|^2\right)$

où $u$ est l'endomorphisme symétrique associé à $H_f(a)$.

**Exemple fondamental** : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$. Alors :

$$f(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + \frac{1}{2}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \ + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\right) + \mathfrak{o}\left(x^2+y^2\right).$$

## 3) Condition nécessaire d'extremum local

**Prop** : Supposons que $f$ admet un extremum local en un point $a \in U$. Alors $\operatorname{grad} f(a) = \overrightarrow{0}$.

*Preuve* : On considère les fonctions partielles $\varphi : t \longmapsto f(a+tv)$.
On a $\varphi'(0) = 0$ car $\varphi$ admet en 0 (intérieur au domaine de définition de $\varphi$) un extremum local.
Donc $\operatorname{grad} f(a) \cdot v = \overrightarrow{0}$, et comme $v$ est arbitraire (il suffit de choisir les $v = e_j$), $\operatorname{grad} f(a) = \overrightarrow{0}$.

## 4) Condition suffisante d'extremum local

**Prop** : Supposons $\operatorname{grad} f(a) = \overrightarrow{0}$.

(i) Condition suffisante d'extremum local strict :

Si $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$,alors $f$ admet en $a$ un minimum local strict.

*Remarque* : de même, si $H_f(a) \in S_p^{--}(\mathbb{R})$, alors $f$ admet en $a$ un maximum local strict.

(ii) Condition nécessaire d'extremum local :

Si $f$ admet pas en $a$ un minimum local, alors $H_f(a) \in S_p^{+}(\mathbb{R})$.

*Remarque* : de même, si $f$ admet pas en $a$ un minimum local, alors $H_f(a) \in S_p^{-}(\mathbb{R})$.

*Variante* : Si $H_f(a)$ admet au moins une valeur positive et une valeur propre strictement négative, alors $a$ n'admet pas d'extremum local.

*Preuve* : Pour alléger la preuve, on suppose $a = \overrightarrow{0}$.
On change de base orthonotmée (le gradient reste nul).
On choisit une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de $H_f(a)$.
On a donc dans cette nouvelle base : $u(\sum_{i=1}^p x_i e_i) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2$.

(i) Supposons $H_f(a) \in S_p^{++}(\mathbb{R})$. Alors tous les $\lambda_i$ sont strictement positifs.
Posons $\mu = \min(\lambda_1, ..., \lambda_p) > 0$. Alors $u(\sum_{i=1}^p x_i e_i) \geq \mu \sum_{i=1}^p x_i^2$, c'est-à-dire $u(\overrightarrow{x}) \geq \mu \left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$.

Or, on a $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{2}u(\overrightarrow{x}) + \left\|\overrightarrow{x}\right\|^2 \ \varepsilon(\overrightarrow{x})$, avec $\varepsilon(\overrightarrow{x}) = \mathfrak{o}(1)$.
Donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall (x,y) \in B(0,\alpha)$, $|\varepsilon(\overrightarrow{x})| \leq \frac{1}{4}\mu$.
Donc $f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{4}\mu \left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$ au voisinage de $\overrightarrow{0}$. Donc $f$ admet en $\overrightarrow{0}$ un minimum local strict.

(ii) Supposons $H_f(a) \notin S_p^{+}(\mathbb{R})$. Alors $H_f(a)$ admet au moins une valeur propre $\lambda_i < 0$.
On a alors $f(x_i \overrightarrow{e_i}) = f(\overrightarrow{0}) + \frac{1}{2}\lambda x_i^2 + \mathfrak{o}(x_i^2)$.
Comme $\lambda < 0$, alors $f(x_i \overrightarrow{e_i}) < f(\overrightarrow{0})$ pour $x_i$ non nul au voisinage de 0.
Donc $f$ n'admet pas de minimum local en $\overrightarrow{0}$.