Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

1) Principe général : résolution par réduction

On considère le système différentiel

$$(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$$

d'inconnue $X : I \to \mathbb{K}^n \quad t \longmapsto X(t)$ de classe C^1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, avec $t \longmapsto B(t)$ continue sur I.

En posant $X(t) = PY(t)$, le système (E) s'écrit

$$Y'(t) = (P^{-1}AP)Y(t) + P^{-1}B(t)$$

Remarque : Comme $t \longmapsto X(t)$ est de classe C^1, alors $t \longmapsto Y(t)$ est aussi de classe C^1.

2) Résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et diagonalisables

a) *Résolution d'un système homogène*

On considère le système différentiel linéaire homogène $(E) : X'(t) = AX(t)$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n \quad t \longmapsto X(t)$ de classe C^1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque : Les solutions sont de classe C^∞ (toute solution est de classe C^n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$).

On suppose A diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda_j \in \mathbb{K}$ telle que $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Remarque : Le j-ième vecteur colonne P_j est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_j.

On effectue le changement de variable $X(t) = PY(t)$. On a $X'(t) = PY'(t)$, donc (E) s'écrit

$$Y'(t) = (P^{-1}AP)Y(t), \text{ c'est-à-dire } Y'(t) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)Y(t)$$

En posant $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, le système s'écrit donc $\begin{pmatrix} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{pmatrix}$.

Donc $y_j(t) = k_j \exp(\lambda_j t)$, avec $k_j \in \mathbb{K}$. On en conclut que les solutions de (E) sont les

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t)P_j = \sum_{j=1}^{n} k_j e^{\lambda_j t} P_j \text{ , avec } (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{K}^n$$

L'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(I, \mathbb{K}^n)$ de dimension n (cohérent avec la théorie générale).

Remarque : On peut aussi présenter de la façon suivante : On cherche $X(t)$ sous la forme $\sum_{j=1}^n y_j(t)P_j$.

On a $X'(t) = \sum_{j=1}^n y_j'(t)P_j$ et $AX(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j(t)P_j$, d'où la CNS : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $y_j'(t) = \lambda_j y_j(t)$.

b) *Résolution avec second membre*

ce qui donne des équations de la forme $y_j'(t) = \lambda_j y_j(t) + g_j(t)$, qu'on sait résoudre.

3) Résolution des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et trigonalisables

a) *Résolution d'un système homogène.*

On considère le système différentiel linéaire homogène $(E) : X'(t) = AX(t)$ d'inconnue $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n \quad t \longmapsto X(t)$ de classe C^1 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On Suppose A non diagonalisable. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A est trigonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telle que $P^{-1}AP = T$. Avec $X(t) = PY(t)$, le système (E) s'écrit $Y'(t) = TY(t)$.

Autrement dit, on obtient des relations de la forme : $y_j'(t) = t_{jj}y_j(t) + \sum_{k>j} t_{jk}y_k(t)$.

On peut donc obtenir les y_j par récurrence forte descendante.

Remarque : En fait, si on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les valeurs propres de A (qui sont les valeurs des coefficients diagonaux de T), on peut montrer que les coefficients de $X(t)$ sont des combinaisons linéaires de la forme

$$\sum P_i(t)e^{\lambda_j t}$$

où $P_1, ..., P_r$ sont des polynômes de degré $\leq m_j$, où m_j est l'ordre de multiplicité de λ_j comme racine de χ_A.

b) *Résolution avec second membre.*

Avec les hypothèses précédentes, le système $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$ s'écrit $Y'(t) = TY(t) + P^{-1}B(t)$.

On obtient donc un système triangulaire d'équations différentielles $y_j'(t) = t_{jj}y_j(t) + \sum_{k>j} t_{jk}y_k(t) + g_j(t)$.

c) *Cas des systèmes réels.*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère A comme matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on peut déterminer les solutions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ solutions de $(E) : X'(t) = AX(t)$.

Les solutions réelles $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de (E) sont les parties réelles des solutions complexes.

4) Recherche dans certains cas particuliers d'une solution particulière

Considérons $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$, où les coefficients de $B(t)$ sont des fonctions exponentielles.

En appliquant le principe de superposition, on se ramène au cas où $B(t)$ est de la forme $e^{\lambda t}B$.

Lorsque $B(t) = e^{\lambda t}B$ et que λ n'est pas valeur propre de A, alors (E) admet une solution particulière de (E) de la forme $X(t) = e^{\lambda t}Z$, où Z est le vecteur défini par $(\lambda I_n - A)Z = B$.

5) Exemple : Systèmes différentiels linéaires RÉELS à coefficients constants d'ordre 2

Considérons $X'(t) = AX(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$.

PREMIER CAS : Notons $P = (P_1, P_2)$ une matrice de passage telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Il résulte de 1) que les solutions sont les $X(t) = \alpha e^{\lambda t}P_1 + \beta e^{\mu t}P_2$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

DEUXIÈME CAS : Notons $P = (P_1, P_2)$ une matrice de passage telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

En posant $X(t) = y_1(t)P_1 + y_2(t)P_2$, le système s'écrit

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) = \lambda y_2(t) \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} y_1'(t) = (k_1 + k_2 t)\exp(\lambda t) \\ y_2'(t) = k_2 \exp(\lambda t) \end{cases}$$

Troisème cas : Notons $Q = (P_1 + iP_2, P_1 - iP_2)$ une matrice de passage telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$,

avec a et b réels, et $b \neq 0$.

Première méthode. On résout dans $\mathbb{C}$. Les solutions $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ sont les $X(t) = \alpha e^{at} e^{ibt}(P_1 + iP_2) + \beta e^{bt} e^{ibt}(P_1 - iP_2)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, et on obtient les solutiuons réelles en prenant les parties réelles des solutions complexes.

Seconde méthode. On pose $X(t) = x(t)P_1 + y(t)P_2$.

Avec $P = (P_1, P_2)$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ matrice de similitude directe. L'idée est de poser $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Le système s'écrit $\begin{cases} x'(t) = ax(t) - by(t) \\ y'(t) = by(t) + ay(t) \end{cases}$, c'est-à-dire $z'(t) = (a + ib)z(t)$

On en déduit que les solutions sont les $z(t) = (\alpha + i\beta)e^{at}e^{ibt} = Ke^{at}e^{i(bt+\varphi)}$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(K, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

On en conclut que les solutions sont les

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{at}(\alpha \cos bt - \beta \sin bt)P_1 + e^{at}(\alpha \sin bt + \beta \cos bt)P_2 \\ &= Ke^{at}(\cos(bt + \varphi)P_1 + \sin(bt + \varphi)P_2) \end{aligned}$$

Remarque : Dans tous les cas, les solutions convergent toutes vers 0 en $+\infty$ ssi les valeurs propres λ, μ, $a + ib$ sont strictement négatives (de partie réelle strictement négative pour $a + ib$).

6) Utilisation de l'exponentielle complexe (*complément culturel* HP)

Rappel : On définit $\exp(tA) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n$. La fonction $M : t \longmapsto \exp(tA)$ est dérivable, et $M'(t) = AM(t)$.

Les solutions $X : I \to \mathbb{K}$ de $(E) : X'(t) = AX(t)$ sont les $X(t) = X_0 \exp(tA)$, avec $X_0 \in \mathbb{K}^n$.

En particulier, si $A = P^{-1}\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P$ est diagonalisable, on a $\exp(tA) = P^{-1}\,\mathrm{Diag}(e^{\lambda_1 t}, ..., e^{\lambda_n t})P$.