

Séries entières

Une série entière est une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et où z est une variable complexe.

1) Lemme d'Abel, rayon de convergence

a) Lemme d'Abel

Prop : Supposons $(|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $|z| < \rho$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

De plus, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque de centre 0 et de rayon $r < \rho$.

En effet, on a $|a_n z^n| \leq \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n (a_n \rho^n) \leq M \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n$, où M est un majorant de $(|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Rayon et disque de convergence : On définit $R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid (|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Ce nombre est appelé rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. C'est l'unique réel vérifiant :

$$\begin{cases} \sum a_n z^n \text{ converge absolument pour tout } |z| < R \\ \sum a_n z^n \text{ diverge pour tout } |z| > R \end{cases}$$

Remarques :

- On ne peut rien dire de façon générale de la convergence sur le cercle $|z| = R$.

- On peut avoir $R = 0$ ou $R = +\infty$. Lorsque $R = +\infty$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ définit une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} .

c) Convergence normale sur tout compact du disque ouvert de convergence

Prop : Soient $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R .

Alors, pour tout $0 \leq r < R$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque $D(0, r)$.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{z \in D(0, r)} |a_n z^n| = |a_n| r^n$, et par définition de r , $\sum |a_n| r^n$ converge.

Remarque : Plus généralement, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact K du disque ouvert de convergence. En effet, il existe $r = \max\{|z|, z \in K\}$ et on a $r < R$, donc $K \subset B(0, r)$.

d) Utilisation des théorèmes de comparaisons

Prop : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R' .

Si $b_n = O(a_n)$, alors $R' \geq R$. En effet, pour $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument, donc $\sum b_n z^n$ converge aussi.

Remarque : On en déduit en particulier que si $a_n \sim b_n$, alors $R = R'$.

IMPORTANT : Pour $\lambda > 0$, le rayon de convergence de $\sum a_n \lambda^n z^n$ est $\frac{R}{\lambda}$. D'où :

Corollaires : Soit $\lambda > 0$.

- Si $b_n = O(\lambda^n a_n)$, avec $\lambda > 0$, alors $R' \geq R/\lambda$.

- Si $|b_n| \geq \lambda^n a_n$ pour n assez grand, alors $R' \leq R/\lambda$.

e) Rayon de convergence des séries associées par dérivation et par primitivation

Prop : Les séries $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{1}{n+1} a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Plus généralement, $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n n^\alpha z^n$ ont même rayon de convergence.

Preuve : Notons R et R' les rayons de convergence respectifs de $\sum a_n z^n$ et de $\sum a_n n^\alpha z^n$.

Pour tout $\lambda > 1$, $n^\alpha = O(\lambda^n)$, donc $a_n n^\alpha = O(a_n \lambda^n)$, d'où $R' \geq R/\lambda$.

Comme $\lambda > 1$ est arbitraire, on obtient $R' \geq R$ en faisant tendre λ vers 1^- .

En changeant α en $-\alpha$, on permute les rôles de a_n et de $a_n n^\alpha$. On a donc de même $R \geq R'$. D'où $R = R'$.

IMPORTANT : Plus généralement, si $b_n = u_n a_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$, alors $R = R'$.

En effet, pour tout $\lambda > 1$, on a $u_n = O(\lambda^n)$, donc $R' \geq R$, et de même $R \leq R'$.

Ainsi, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n n^\alpha (\ln n)^\beta z^n$ ont le même rayon de convergence.

2) Calcul pratique du rayon de convergence

a) *Prop* : Pour tout réel α , la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$ a le même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Preuve : Si $(|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $(n^\alpha |a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée pour tout $r < \rho$.

Prop : Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le rayon de convergence de $\sum a_n \lambda^n z^n$ est $\frac{R}{|\lambda|}$, où R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Preuve : $\sum a_n \lambda^n z^n = \sum a_n (\lambda z)^n$, qui converge lorsque $|\lambda z| < R$ et diverge lorsque $|\lambda z| > R$.

b) Règle de D'Alembert : Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, alors $R = \frac{1}{L}$ (en particulier, si $L = 0$, alors $R = +\infty$).

Exemples : Le rayon de convergence de $\sum z^n/n!$ est $R = +\infty$; le rayon de convergence de $\sum n! z^n$ est $R = 0$.

Preuve :

On pose $u_n = a_n z^n$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L |z|$, donc $\begin{cases} \text{pour } L |z| < 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ converge} \\ \text{pour } L |z| > 1, \text{ la série } \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$

On en déduit $R = L^{-1}$.

c) Cas des séries lacunaires

Avec $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum a_n z^{pn+r}$ est de rayon de convergence $R^{1/p}$, où R est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

En effet, pour z non nul, $\sum a_n z^{pn+r} = z^r \sum a_n z^{pn}$ converge ssi $\sum a_n (z^p)^n$ converge.

Exemple : Le rayon de convergence de $\sum 2^{-n} z^{3n}$ vaut $2^{1/3}$.

d) Somme de séries entières

Prop : Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont des séries entières de rayons de convergence R et R' , alors le rayon R'' de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R, R')$.

Remarque : Lorsque $R > R'$, alors $R'' = \min(R, R')$.

e) Exemples

Faute de pouvoir appliquer les propriétés précédentes, on revient à $R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ \mid (|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.

On utilise aussi souvent : Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0)^n$ converge, alors $R \geq |z_0|$. Si elle diverge, alors $R \leq |z_0|$.

Exemple : Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R . Le rayon de $\sum a_n^2 z^n$ vaut R^2 .

En effet, $(|a_n| \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi $(|a_n|^2 \rho^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exemple : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée ne convergeant pas vers 0. Alors le rayon de $\sum a_n z^n$ est $R = 1$.

En effet, $a_n = O(1)$, donc $R \geq 1$. D'autre part, $\sum a_n$ diverge, donc $R \leq 1$.

3) Produit de Cauchy de deux séries, produit de séries entières

a) Le produit de Cauchy de deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Prop : Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors $\sum c_n$ cv absolument, et $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Preuve : On pose $d_n = |a_0 b_n| + |a_1 b_{n-1}| + \dots + |a_n b_0|$. On a $\sum_{k=0}^n d_k \leq (\sum_{k=0}^n |a_k|) (\sum_{k=0}^n |b_k|)$ donc majorée. Donc $\sum d_n$ converge, d'où $\sum c_n$ converge absolument.

De plus, $|\sum_{k=0}^n c_k - (\sum_{k=0}^n a_k) (\sum_{k=0}^n b_k)| \leq \sum_{k=n+1}^{2n} d_k$, qui tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$, car $\sum d_n$ converge.

Corollaire : Avec $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, on a $\exp(z+z') = \exp(z) \exp(z')$.

Preuve : Résulte de $\sum_{k=0}^n \frac{z^k (z')^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{(z+z')^n}{n!}$

Remarque : L'exemple $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ prouve que la propriété peut être fautive si les séries sont semi-convergentes. En effet, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, alors que $\sum c_n$ diverge, car $c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}$.

b) Produit (de Cauchy) de séries entières

Remarque fondamentale : Le produit de Cauchy des suites $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(c_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En effet, $\sum_{k=0}^n (a_k z^k) (b_{n-k} z^{n-k}) = c_n z^n$.

Prop : Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont des séries entières de rayons de convergence R et R' , alors leur produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\min(R, R')$.

De plus, pour tout $|z| < \min(R, R')$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n) (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n)$.

4) Séries entières à variables réelles

a) Dérivées successives d'une fonction définie par une série entière

Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe.

On considère $S :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Alors S est de classe C^∞ , et on obtient $S^{(p)}$ en dérivant terme à terme :

$$\forall x \in]-R, R[, \forall p \in \mathbb{N}, S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n+1)\dots(n+p-1) a_{n+p} x^n$$

En effet, les séries dérivées convergent normalement sur tout segment $[-r, r]$ inclus dans $]-R, R[$.

La primitive de S s'annulant en 0 est $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

En effet, la convergence normale sur $[0, x]$ permet d'intégrer terme à terme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Un autre argument consiste à dériver $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ qui admet aussi R comme rayon de convergence.

b) Expression des coefficients

Corollaire : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, $S = \tilde{0}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$.

Preuve : $S^{(n)}(0)$ est le terme constant de la série entière $S^{(n)}(x)$.

Corollaire : Le développement limité de S s'obtient donc en tronquant la série à l'ordre souhaité.

Preuve : On applique la formule de Taylor-Young et le corollaire précédent.

Corollaire : Deux séries entières qui coïncident au voisinage de 0 ont les mêmes coefficients.

Remarque : En revanche, deux séries entières peuvent coïncider en une infinité de réels sans être égales.

Par exemple, La fonction $\sin : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ s'annule en tous les $n\pi$ sans être identiquement nulle.

c) Comportement au bord de l'intervalle de convergence

Remarque culturelle :

Théorème d'Abel : (HP désormais) Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière définie sur $] -R, R[$.

Si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n = S(R)$.

Ainsi, S est prolongeable par continuité sur $] -R, R]$, et $S(R) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

IMPORTANT : La preuve est immédiate si $\sum |a_n| R^n$ converge (c'est le cas lorsque les a_n sont positifs), puisque la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-R, R]$, donc on peut intervertir somme et limite.

Remarque culturelle : En revanche, S peut admettre une limite en R sans que $\sum a_n R^n$ converge.

Par exemple, $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ converge vers $\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 1^- , mais $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.

IMPORTANT : La preuve est immédiate si $\sum a_n R^n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. En effet, la série $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[0, R]$, donc on peut intervertir somme et limite.

Exemple : On a $\forall x \in] -1, 1], \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$, notamment $\ln(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Exemple : De même, on a $\forall x \in] -1, 1], \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$.

Ainsi, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Plus généralement, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+1} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^p}$.

5) Développements en série entière des fonctions numériques

a) *Définition :* Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est DSE (développable en série entière) sur $] -R, R[$, où $R > 0$, ssi il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in] -R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque : Dans ce cas, on a nécessairement $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, si f est DSE sur $] -R, R[$, la série entière associée est nécessairement la série de Taylor de f .

b) Méthodes de développement en série entière

Il y a essentiellement trois approches permettant de justifier qu'une fonction numérique de classe C^∞ est DSE.

- *Première méthode : Formule de Taylor-Lagrange.*

En effet, avec $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k = R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.

Donc f est DSE sur $] -R, R[$ ssi $\forall x \in] -R, R[, \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$.

Exemple : On a $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En effet, $\left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} |\exp^{(n+1)}| \leq \frac{k|x|^{n+1}}{(n+1)!}$, avec k indépendant de n .

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \exp(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = 0$, c'est-à-dire $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Remarque : En pratique, on cherche d'abord à utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange (formule plus simple à utiliser), mais dans certains cas, il faudrait majorer le reste plus finement en utilisant la forme avec reste intégral.

- *Deuxième méthode : Méthode de l'équation différentielle (cf paragraphe 10).*

La fonction f est l'unique solution d'une équation différentielle pour laquelle on détermine une série entière solution.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est la solution de (E) : $(1+x)y'(x) = \alpha y(x)$ vérifiant $y(0) = 1$.

Mais $y : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n$ est solution de (E) sur $] -1, 1[$ et vérifie $y(0) = 1$.

Donc $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $] -1, 1[$ et que $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^n$.

- *Troisième méthode* : Par intégrations ou dérivation d'une fonction dont le DSE est connu.

Par convergence normale d'une série entière (et de ses dérivées) sur tout segment inclus dans $] -R, R[$, on peut intégrer ou dériver la fonction considérée.

Exemple : $\forall x \in] -1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, donc $\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n$.

c) Contre-exemples

Une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} n'est pas nécessairement développable en série entière.

Exemple : La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ peut converger sans que f soit développable en série entière.

Par exemple, avec $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, f est C^∞ , non nulle, mais $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, la série de Taylor existe (de rayon de convergence infinie), mais sa somme n'est pas $f(x)$ (sauf en $x = 0$).

Exemple : La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et n'est développable en série entière que sur l'intervalle $] -1, 1[$: $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ (série entière de rayon de convergence $R = 1$).

d) Cas des fonctions à variable complexe

Soit $z \mapsto f(z)$ une fonction définie sur \mathbb{C} (ou une partie de \mathbb{C} contenant 0).

On se ramène au cas de fonctions à variable réelle en considérant $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ $t \mapsto f(tz)$.

On peut alors appliquer à g les méthodes du b).

6) Développements en série entière des fonctions usuelles

a) Développement en série géométrique

Pour tout $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

$\forall x \in] -1, 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ et $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$.

En effet, les DSE de \ln et \arctan peuvent se déduire par intégration sur $] -1, 1[$: cf intégration terme à terme.

b) Puissances : $\forall x \in] -1, 1[$, $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$.

La preuve la plus simple consiste à utiliser l'équation différentielle $(1+x)y'(x) = \alpha y(x)$ et $y(0) = 1$.

Remarque : $\forall x \in] -1, 1[$, $\frac{1}{(1-x)^\beta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} x^n$

Remarque culturelle : De $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(\alpha)$, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha n!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n+1)} = \Gamma(\alpha)$.

Donc $\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1) \sim n^{\beta-1} \Gamma(\beta)^{-1}$.

Exemple : On a $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n$.

En effet, avec $\beta = \frac{1}{2}$, $\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!} = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{n! 2^n} = \frac{1}{(n!)^2 2^{2n}}$.

Remarque : Avec $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, on a $4^{-n} \binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, qui s'écrit aussi $n^{-1/2} \Gamma(\frac{1}{2})^{-1}$.

c) Séries exponentielles : $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \operatorname{ch}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$

Le DSE des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ peut se mener en considérant, pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'application $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto f(tz).$

Par exemple, l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à $t \mapsto e^{tz}$ donne $\left| e^z - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max(1, e^{\operatorname{Re} z}).$

On peut aussi démontrer le DSE de $t \mapsto e^{tz}$ comme la solution de l'équation différentielle $y'(t) = zy(t)$ et $y(0) = 1.$

Exemple : De façon analogue, $\sum \frac{z^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}(e^z + e^{jz} + e^{j^2z}),$ avec $j = e^{2i\pi/3}.$

7) Développement en série entière des fractions rationnelles (complément HP)

a) Décompositions en série entière des éléments simples de $\mathbb{C}(X)$

$$\forall |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \text{ et par dérivation } \left(\frac{1}{1-z} \right)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}, \left(\frac{1}{1-z} \right)^p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+p-1)}{p!} z^n.$$

On en déduit, pour $\lambda \in \mathbb{C}^*,$ le DSE de $\frac{1}{z-\lambda} = \frac{-1}{\lambda} \frac{1}{1-(z/\lambda)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{\lambda^{n+1}}$ pour $|z| < |\lambda|.$

Conséquence : Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Alors :

i) F est DSE sur le disque de rayon de convergence $R = \inf\{|\lambda| \mid \lambda \text{ pôle de } F\}.$

En particulier $R = +\infty$ si F n'admet pas de pôle (c'est-à-dire si F est un polynôme).

ii) Le rayon de convergence de la série de Taylor de F en 0 est $R.$

Preuve : i) On décompose F en éléments simples. Ainsi, le DSE est obtenu en sommant les DSE de ses éléments simples, qui sont tous définis au moins pour $|z| < R.$

ii) Notons R' le rayon de convergence de la série de Taylor de F en 0. Il résulte de i) que $R' \geq R.$

Supposons par l'absurde que $R' > R.$ Considérons z_0 un pôle de F de module $R.$

La fonction S associée à la série entière coïncide avec F sur et est continue sur le disque ouvert de rayon $R',$ donc borné sur le disque fermé de rayon $R.$ Or, comme $|S(z)| = |F(z)|$ tend vers $+\infty$ lorsque z converge vers z_0 (avec $|z| < R$), on obtient une contradiction. Donc $R' = R.$

Exemple : $\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{j-\bar{j}} \left(\frac{1}{x-j} - \frac{1}{x-\bar{j}} \right) = \frac{2i}{j-\bar{j}} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x-j} \right) = \frac{-2}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{j^{n+1}} \right).$

On obtient $\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$ avec $a_n = 1, -1$ ou 0 selon la valeur de $(n \bmod 3).$

Exemple : Le DSE de $\ln(2+x-x^2) = \ln 2 + \ln(1+x) + \ln(1-\frac{x}{2})$ s'obtient très simplement.

En revanche, l'obtention du DSE de $\ln(1+x+x^2)$ se fait en intégrant celui de $\frac{1+2x}{1+x+x^2}.$

b) Obtention des coefficients du DSE d'une fraction rationnelle par récurrence (linéaire)

Principe : On considère $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n,$ avec $|z| < R$ (module maximum des pôles).

Alors $P(z) = Q(z) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$

Par identification, on en déduit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre $r = \deg Q.$

Exemple : On considère $F(x) = \frac{1+x}{1-x-2x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$

Or $(1-x-2x^2) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2}) x^n,$ en posant $a_{-1} = a_{-2} = 0.$

Donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite définie par $a_0 = 1, a_0 - a_1 = 1$ et $\forall n \geq 2, a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0.$

L'équation caractéristique est $z^2 - z - 2 = 0,$ de racines 2 et $-1.$

Donc $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, avec $\alpha + \beta = 1$ et $2\alpha - \beta = 0$, d'où $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{2}{3}$.

8) Formules de Cauchy

a) Fonction à variable complexe considérée comme fonction à deux variables réelles

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R .

On dispose donc de la fonction $f : D \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où D est le disque ouvert de rayon R .

b) Principe des zéros isolés

Prop : Si f admet une suite de zéros convergeant vers 0, alors tous les a_n sont nuls.

Autrement dit, si f n'est pas identiquement nulle, f ne s'annule pas sur un voisinage de 0 privé de 0.

Preuve : Sinon, f s'écrit $f(z) = z^p g(z)$, avec $g(0) \neq 0$, et par continuité, g n'est pas nulle au voisinage de 0.

c) Lien avec les séries de Fourier

La restriction de f à un cercle de rayon $r < R$ est la série de Fourier $f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$.

d) Formules de Cauchy

Prop : Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, R[$,
$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

En particulier, f est entièrement définie par sa restriction sur le cercle de centre O et de rayon r .

Preuve : On a $f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$, et la série de fonctions (en θ) converge normalement sur \mathbb{R} . En intégrant terme à terme sur $[0, 2\pi]$, on obtient $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 2\pi a_n r^n$, car $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta = 0$ si $k \neq n$.

Conséquences :

- Si f est nulle sur un cercle, f est identiquement nulle.

- Si $R = +\infty$ et si $f(z) = O(|z|^p)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, alors $\forall n > p$, $a_n = 0$, donc f polynôme de degré $\leq p$.

9) Applications des séries entières aux calculs de sommes (et au dénombrement)

a) Calculs de sommes

Exemple : On considère les sommes $U = \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{-n}$ et $V = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n}$ et $W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n}}{n}$.

Avec $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, on a $U = \frac{1}{2} f' \left(\frac{1}{2} \right)$, $V = \frac{1}{4} f'' \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} f' \left(\frac{1}{2} \right)$ et $W = \int_0^{1/2} f(x) dx$.

Remarque : En particulier, on a $\forall x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Exemple : On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \arctan(x) dx$.

Preuve : On a $\forall x \in [0, 1[$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}$.

Comme $\sum \int_0^1 f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$, alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^1 f(x) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$

Or, $\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \arctan(x) dx$.

Exemple : Soit p et $r \in \mathbb{N}^*$.
$$S_p = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{pn+r} \text{ vaut } \int_0^1 \frac{t^{r-1}}{1+t^p} dt.$$

On retrouve les cas classiques pour $p = 1$ et $p = 2$: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1$.

En effet, en intégrant (par cv normale) la relation $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{np+r-1} = \frac{t^{r-1}}{1+t^p}$ sur $[0, x]$, où $x < 1$, on obtient :

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{np+r}}{pn+r} = \int_0^x \frac{t^{r-1}}{1+t^p} dt = F(x).$$

Or, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{np+r}}{pn+r}$ converge uniformément sur $[0, 1]$, donc est continue en 1^- .

$$\text{Donc } S_p = \lim_{x \rightarrow 1} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \frac{t^{r-1}}{1+t^p} dt = \int_0^1 \frac{t^{r-1}}{1+t^p} dt.$$

Complément culturel : Une autre preuve consiste à passer par les sommes partielles $S_N(t) = t^{r-1} \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{np}$.

$$\text{En effet, on a } S_N(t) = t^{r-1} \sum_{n=0}^N (-1)^n t^{np} = \frac{t^{r-1}}{1+t^p} + R_N(t), \text{ avec } R_N(t) = (-1)^N \frac{t^{r-1}}{1+t^p} t^{(N+1)p}.$$

Pour prouver que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_N(t) dt = \int_0^1 \frac{t^{r-1}}{1+t^p} dt$, il suffit de prouver que $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^1 R_N(t) dt = 0$.

Or, une majoration simple et directe donne : $|R_N(t)| \leq \int_0^1 t^{(N+1)p} dt = \frac{1}{(N+1)p} \rightarrow 0$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

$$\text{Exemple : } S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{2} \arctan(1) = \frac{\pi}{8}.$$

b) Dénombrement

Exemple : On note D_n le nombre de dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ (= permutations sans point fixe).

On montre (admis ici que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k = n!$)

Pour $x \in]-1, 1[$, on considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$. On obtient $f(x)e^x = \frac{1}{1-x}$, donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

On en déduit que $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$, et en particulier $D_n \sim e^{-1} n!$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exemple : On note a_n le nombre d'entiers $(k, l) \in \mathbb{N}^2$ tels que $k + 2l = n$.

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} x^{k+2l} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

On obtient a_n en utilisant le DSE via une décomposition en éléments simples.

Exemple : On note b_n le nombre de p -uplets $(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$.

$$\text{Alors } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \frac{1}{(1-x)^p}, \text{ d'où } b_n = \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)}{n!} = \binom{n+p-1}{p-1}.$$

Exemple : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} x^{n(k+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$, où d_n est le nombre de diviseurs de n .

10) Séries entières et équations différentielles

IMPORTANT : Une fonction f définie sur $] -R, R[$, où $R > 0$, par une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est nulle ssi tous les a_n sont nuls. Par linéarité, deux fonctions définies par des séries entières coïncident sur $] -R, R[$ ssi les séries entières ont les mêmes coefficients.

IMPORTANT : On notera que les raisonnements suivants se font par analyse et synthèse.

a) Méthode de l'équation différentielle pour déterminer des développements en série entière

Pour déterminer le DSE (ou le développement limité) d'une fonction, il est souvent judicieux de caractériser cette fonction par une équation différentielle. On cherche alors la solution de cette équation sous forme d'une série entière en procédant par identification.

Exemple : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $(E) : (1+x)y'(x) = \alpha y(x)$.

La série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie (E) ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)a_{n+1} + na_n = \alpha a_n$, c'est-à-dire $a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n$.

On obtient donc $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} a_0$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vaut 1 (par le critère de d'Alembert).

On vérifie que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ sont solutions de (E) sur $] -1, 1[$.

De plus, elles valent 1 en $x = 0$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, les deux fonctions sont égales sur $] -1, 1[$.

Exemple : Le DSE de $f(x) = (\arcsin x)^2$ s'obtient directement à partir d'une équation différentielle.

En effet, on a $(1-x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$, d'où en dérivant, on obtient $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

En procédant par identification, on montre que l'équation différentielle $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) = 2$ admet une solution développable en série entière g , de rayon de convergence vaut 1 et vérifiant $g(0) = g'(0) = 0$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $\forall x \in] -1, 1[$, $f(x) = g(x)$.

Exemple : La fonction tan est la solution de l'équation différentielle $y' = 1 + y^2$ vérifiant $y(0) = 0$.

La série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie (E) ssi

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie vérifie notamment $0 \leq a_n \leq 1$, donc le rayon R de la série entière vérifie $R \geq 1$.

On en déduit que tan est DSE sur $] -1, 1[$. *Remarque :* En fait, tan est DSE sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, cf 9).

b) Recherche des solutions développables en série entière d'une équation différentielle

Remarque : Si $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors $y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$ et $xy'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$.

Exemple : On considère (E) : $(4+x^2)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$.

On cherche une solution y sur un intervalle $] -R, R[$, avec $R > 0$, de la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

(E) s'écrit : $\sum_{n=0}^{+\infty} 4(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n + (n-1)na_n x^n + 3na_n x^n + a_n x^n = 0$,

ce qui équivaut (par le cours) à $\forall n \in \mathbb{N}$, $4(n+1)(n+2)a_{n+2} + (n+1)^2 a_n = 0$, c'est-à-dire $a_{n+2} = -\frac{1}{4} \frac{n+1}{n+2} a_n$.

On pose donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $\alpha_{2m} = \frac{(-1)^m}{4^m} \prod_{k=1}^m \left(\frac{2k-1}{2k} \right)$ et $\alpha_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{4^m} \prod_{k=1}^m \left(\frac{2k}{2k+1} \right)$.

On considère les fonctions définies par les séries entières $f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_{2m} x^{2m}$ et $g(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \alpha_{2m+1} x^{2m+1}$.

Le rayon de convergence de f et g est $R = 2$, car $R^{-2} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{2m+2}}{\alpha_{2m}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_{2m+1}}{\alpha_{2m-1}} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, f et g sont des solutions (linéairement indépendantes) de (E) sur $] -2, 2[$.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, elles forment une base du sev des solutions sur $] -2, 2[$, lesquelles se prolongent en des solutions de classe C^∞ sur \mathbb{R} (mais ne sont pas DSE sur \mathbb{R}).

c) Séries génératrices associées à des suites définies par des relations de récurrence

Exemple : Considérons la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et $(n+1)a_{n+1} = a_n + 1$.

Alors $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie sur $] -1, 1[$ et vérifie $F'(x) = F(x) + \frac{1}{1-x}$. On peut ensuite expliciter F .

Exemple : Considérons la suite de Fibonacci $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Comme $a_n \leq 2^n$, alors $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est bien définie au voisinage de 0.

On a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, d'où $(F(x) - 1 - x) = x(F(x) - 1) + x^2 F(x)$.

On en conclut $F(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\lambda-\mu} \left(\frac{\lambda}{1-\lambda x} - \frac{\mu}{1-\mu x} \right)$, d'où $a_n = \frac{1}{\lambda-\mu} \lambda^{n+1} - \frac{1}{\lambda-\mu} \mu^{n+1}$.