Fonctions à valeurs vectorielles

Terminologie :

- Dans un evn, la direction d'un vecteur non nul u est le vecteur $\dfrac{u}{\|u\|}$.
- Pour $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, $X(h) = \mathfrak{o}\,(1)$ en 0 ssi $\lim_{h\to 0} X(h) = 0$, c'est-à-dire ssi les coordonnées de $X(h)$ sont en $\mathfrak{o}\,(1)$.

Plus généralement, $X(h) = \mathfrak{o}\,(h^p)$ ssi $X(h) = h^p \overrightarrow{\varepsilon}(h)$ au voisinage de 0, avec $\|\overrightarrow{\varepsilon}(h)\| = \mathfrak{o}\,(1)$.

1) Courbe dans un evn (euclidien) de dimension finie $E = \mathbb{R}^p$

a) *Une courbe* est une application $X : I \to \mathbb{R}^P \quad t \longmapsto f(t)$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- $X : I \to \mathbb{R}^p$ est continue ssi les x_i sont continues, où $X = (x_1, ..., x_p)$.
- X est dérivable en a ssi il existe $X'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{X(a+h) - X(a)}{h}$, appelé *vecteur vitesse* en a.

Remarque : Si $X'(a) \neq 0$, la direction de $X(a+h) - X(a)$ converge vers la direction de $X'(a)$.

Définition sans dénominateur : $X(a+h) = f(a) + h\ v + \mathfrak{o}\,(h)$, avec $v = X'(a)$.

- *Vecteur accélération* : $X''(a)$.

b) *Intégrale sur un segment*

Sommes de Riemann : $\int_a^b X(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n X(t_{k,n})$, avec $t_{k,n} = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Intégrations par parties, changements de variables.

b) *Formule fondamentale du calcul différentiel* : Si $X : I \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^1, $\boxed{X(b) = X(a) + \int_a^b X'(t)\ dt}$.

Formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral : Si $X : I \to \mathbb{R}^p$ est de classe C^{n+1}, alors

$$X(b) = X(a) + (b-a)X'(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} X^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} X^{(n+1)}(t)\ dt$$

Rappel : La preuve se fait par intégrations successives : $1 \to (b-t) \to \dfrac{(b-t)^2}{2} \to ... \to \dfrac{(b-t)^n}{n!}$.

2) Longueur de la courbe

Définition : Si X est de classe C^1, $\boxed{\text{la longueur de la courbe } X \text{ sur } [a,b] \text{ est } L = \int_a^b \|X'(t)\|\ dt}$.

Remarque culturelle : Si $\sigma = (t_0, t_1, ..., t_n)$ est une subdivision de $[a,b]$ et si $M_k = X(t_k)$, alors la longueur de la ligne polygonale $\sum_{k=1}^n M_{k-1}M_k = \sum_{k=1}^n \|X(t_k) - X(t_{k-1})\|$ converge vers $\int_a^b \|X'(t)\|\ dt$ lorsque le pas de σ tend vers 0.

3) Inégalité triangulaire

a) *Inégalité triangulaire*

Prop : $\boxed{\left\|\int_a^b X(t)\ dt\right\| \leq \int_a^b \|X(t)\|\ dt}$.

Par les sommes de Riemann, $\int_a^b X(t)\ dt = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n X(t_{k,n})$, avec $t_{k,n} = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Or, par l'inégalité triangulaire, on a $\left\|\dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n X(t_{k,n})\right\| \leq \dfrac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \|X(t_{k,n})\|$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient par continuité de la norme : $\left\|\int_a^b X(t)\ dt\right\| \leq \int_a^b \|X(t)\|\ dt$.

b) *Inégalité des accroissements finis*

Prop : $\boxed{\|X(b) - X(a)\| \leq \int_a^b \|X'(t)\|\ dt \leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]} \|X'(t)\|}$.

Preuve : $\|X(b) - X(a)\| = \left\|\int_a^b X'(t)\ dt\right\| \leq \int_a^b \|X'(t)\|\ dt$ par l'inégalité triangulaire.

Remarque : En revanche, le théorème de Rolle (ou le théorème des accroissements finis) est faux :

Ainsi, si $X(a) = X(b)$, il n'existe pas nécessairement t tel que $X'(t) = 0$.

Par exemple, avec $X(t) = e^{it}$ dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, on a $X'(t) \neq 0$, mais $X(0) = X(2\pi)$.

Prop : Supposons f est de classe C^{n+1}.
$\left\| X(b) - X(a) - (t-a)X'(a) - ... - \dfrac{(t-a)^n}{n!} X^{(n)}(a) \right\| \leq \dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} \left\| X^{(n+1)}(t) \right\|$.

4) Etude locale

a) *Formule de Taylor-Young et étude au voisinage d'un point.*

Prop : Supposons f est de classe C^{n+1}. Alors $X(a+h) = X(a) + hX'(a) + ... + \dfrac{h^n}{n!} X^{(n)}(a) + \mathfrak{o}(h^n)$ en $h = 0$.

Exemple : Avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} e^t \\ \cos t \end{pmatrix}$, on a $X(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{2} t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathfrak{o}(t^2)$.
La courbe admet en $X(0) = (1,1)$ une tangente dirigée par le vecteur $u = (1,0)$.

L'accélération $v = (1,-1)$ n'étant pas colinéaire à u donne la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Exemple : Avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$, on a $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dfrac{1}{6} t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathfrak{o}(t^3)$.
La courbe admet en $X(0) = (1,1)$ une tangente dirigée par $u = (0,1)$.

Le terme en t^3 donne ici la position par rapport à la tangente. On obtient un point de rebroussement.

5) Composée avec des formes linéaires, dérivée de la norme

a) *Prop* : Soient $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et L une forme linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$.
Alors $\dfrac{d}{dt}(L(X(t)) = L(X'(t))$ et $\int_a^b L(X(t))\, dt = L\left(\int_a^b X(t)\, dt\right)$

Première preuve : On utilise $L(X(t)) = \sum_{i=1}^p a_i x_i(t)$, et la linéarité (de la dérivation et de l'intégration).

Seconde preuve : Il existe K tel que pour tout vecteur X, $\ |L(X)| \leq K \|X\|$.

On a alors $L(X(a+h)) = L(X(a)) + L(hX'(a)) + L(\mathfrak{o}(h))$, mais $|L(\mathfrak{o}(h))| \leq K \|\mathfrak{o}(h)\| = \mathfrak{o}(h)$.

Donc $t \longmapsto L(X(t)$ est dérivable en a, et la dérivée vaut $L(X'(a))$.

b) *Prop* : Soit $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1, où $\mathbb{R}^p$ est muni du produit scalaire canonique.

$\boxed{\text{L'application } \varphi : t \longmapsto \|X(t)\|^2 = (X(t) \mid X(t)) \text{ est de classe } C^1, \text{ et } \varphi'(t) = 2(X(t) \mid X'(t))}$.

Ainsi, si $X(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $\dfrac{d}{dt} \|X(t)\| = \dfrac{(X(t) \mid X'(t))}{\|X(t)\|}$.

Remarque : La norme $\|X\|$ est constante ssi pour tout t, le vecteur vitesse $X'(t)$ est orthogonal au rayon vecteur $X(t)$.

Preuve : Posons $X(t) = (x_1(t), ..., x_p(t)) \in \mathbb{R}^p$, où les $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1.

On a $\varphi(t) = (X(t) \mid X(t)) = \sum_{i=1}^p x_i(t)^2$, donc $\varphi'(t) = 2\sum_{i=1}^p x_i(t) x_i'(t)$.

Autre preuve : $\varphi(a+h) = \|X(a) + hX'(a) + \mathfrak{o}(h)\|^2 = \|X(a)\|^2 + 2(X(a) \mid X'(a))+$ termes en $\mathfrak{o}(h)$.

Prop : Plus généralement, si $B : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, et si X et $Y : I \to \mathbb{R}^p$ sont de classe C^1, alors $\varphi : t \longmapsto B(X(t), Y(t))$ est C^1 et $\varphi'(t) = B(X'(t), Y(t)) + B(X(t), Y'(t))$.

On peut prouver cette propriété en utilisant les coordonnées $B(x,y) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p b_{ij} x_i y_j$.

Exemple : Si $X_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, et $\varphi(t) = \det(X_1(t), ..., X_p(t))$, alors $\varphi'(t) = \sum_{j=1}^p \det(X_1(t), ..., X_j'(t), ..., X_p(t))$.

Exemple : Si X et $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, et si $Z(t) = X(t) \wedge Y(t)$, alors $Z'(t) = X'(t) \wedge Y(t) + X(t) \wedge Y'(t)$.

6) Fonctions à valeurs complexes

Exemple : La dérivée de $f(t) = \rho(t)\exp(i\theta(t))$ est $f'(t) = \rho'(t)\exp(i\theta(t)) + i\theta'(t)\rho(t)\exp(i\theta(t))$.

Ainsi, si ρ ne s'annule pas, $\int \dfrac{f'(t)}{f(t)}\, dt = \ln \rho(t) + i\theta(t) + k$, où k constante.

Exemple : *Calcul de la primitive de* $f(t) = \dfrac{1}{t-c}$, où $c = a + ib$, avec b non nul.
Il n'existe pas au programme de logarithme complexe.
On revient donc à la définition en passant par les parties réelles et imaginaires : $f(t) = \dfrac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + i\, \dfrac{b}{(t-a)^2+b^2}$.

Donc $\int f(t)\, dt = \dfrac{1}{2}\ln((t-a)^2+b^2) + i\ \arctan\left(\dfrac{t-a}{b}\right) + k$, où k constante.