Séries de fonctions : Exemples

1) Convergence simple et non uniforme : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n(1-x)}$ sur $[0,1]$.

La série de fonctions converge simplement vers la fonction $S : x \longmapsto 1$ si $x \in [0,1[$, et 0 si $x = 1$.

- La convergence n'est pas normale sur $[0,1]$:
Avec $f_n(x) = x^n(1-x)$, on a $\sup_{[0,1]} f_n = f_n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \sim \dfrac{1}{ne}$.

- On a pour tout $a < 1$, $\sup_{[0,a]} f_n \leq a^n$.

La convergence est donc normale sur tout segment $[0,a]$, où $a < 1$.

Remarque : **Mais la convergence n'est pas normale sur $[0,1[$**

(sinon, elle le serait d'ailleurs sur $[0,1]$, car $\sup_{[0,1[} |f_n| = \sup_{[0,1]} |f_n|$ par continuité des f_n, ce qui est absurde car la fonction somme S n'est pas continue en 1).

2) Convergence uniforme et non normale : $S\boxed{(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n+x}}$ sur $\mathbb{R}^+$.

La série de fonctions converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$, car $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k+x}\right| \leq \dfrac{1}{n}$ (séries alternées).

Mais la convergence de la série n'est normale sur aucun segment.

Remarque : La convergence de la série des dérivées $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)}{(n+x)^2}$ est normale sur $\mathbb{R}^+$ donc S est C^1.

3) Convergence uniforme (et normale) de la série tronquée : Considérons $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2-n^2}}$.

Avec $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2-n^2}$, la série de fonctions $\sum_{n>n_0} f_n(x)$ converge normalement sur $[-n_0, n_0]$.

Donc $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = (\sum_{n=0}^{n_0} f_n(x)) + \left(\sum_{n>n_0} f_n(x)\right)$ est continue sur $[-n_0, n_0] \setminus \mathbb{Z}$.

Comme n_0 est un entier arbitraire, on en déduit la continuité de $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

4) Produits de fonctions

a) Étude de $\boxed{G : x \longmapsto \prod_{n=0}^{+\infty} (1+a^n x)}$, où $0 \leq a < 1$ fixé et $x \geq 0$.

On a $G(x) = \exp\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+a^n x)\right)$. Par cv normale de $\sum \ln(1+a^n x)$ sur $[0,r]$, G est continue.

Remarque : Il s'agit en fait de l'unique fonction continue vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $G(x) = (1+x)F(ax)$.

b) Étude de $\boxed{G(x) = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)}$. On pose $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2}\right)$ et $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

La série $\sum f_n(x)$ converge pour tout réel x, car $f_n(x) \sim \dfrac{x^2}{n^2}$, d'où l'existence de $G(x) = \exp(F(x))$..

On a $f_n'(x) = \dfrac{2x}{x^2+n^2}$. La série des dérivées $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[-a,a] \subset \mathbb{R}^+$, car $\sup_{[-a,a]}\left|\dfrac{2x}{x^2+n^2}\right| \leq \dfrac{2a}{n^2}$.

On en déduit que F, et donc G, sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Remarque : La cv de $\sum f_n'$ n'est pas normale sur $\mathbb{R}$, car par exemple $\sum f_n'(n)$ diverge.

5) Etude aux bornes : Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n+n^2 x}$.

La cv de la série de fonctions est normale sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset]0,+\infty[$, où $a>0$.

- Pour déterminer un équivalent de $S(x)$ en 0^+, on utilise : $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+t^2x}\leq S(x)\leq\frac{1}{1+x}+\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t+t^2x}$.

- Pour déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$, on utilise le théorème de la double limite :

$xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n+n^2x}$ converge normalement sur $[1,+\infty[$, donc $\lim_{x\to+\infty}xS(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

6) Equation fonctionnelle : Pour $x\geq 0$, on pose $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x+n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n(n+x)}$.

La convergence est normale sur tout segment $[0,b]$, car $\sup_{x\in[a,b]}\frac{x}{n(n+x)}\leq\frac{b}{n^2}$.

On a $S(x+1)-S(x)=\dfrac{x}{x+1}$: Pour le prouver, il faut revenir aux *sommes partielles* (qui se télescopent).

On en déduit $S(n)\sim\ln n$ lorsque $n\in\mathbb{N}^*\to+\infty$, et comme S est croissante, on obtient $S(x)\sim_{+\infty}\ln x$.

7) a) **Fonction zêta de Riemann** : $\forall x>1$, $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^x}$.

La convergence normale de $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-\ln n)^p}{n^x}$ sur tout intervalle $[a,+\infty[\subset]1,+\infty[$ assure que ζ est C^∞ sur $]1,+\infty[$.

b) (★) **Fonction zêta alternée** : $\forall x>0$, $G(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

On pose $f_n(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}=(-1)^{n-1}e^{-x\ln n}$. Fixons $p\in\mathbb{N}$. On a $f_n^{(p)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(\ln n)^p}{n^x}$.

Soit $p\in\mathbb{N}$. Pour tout $x>0$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(\ln n)^p}{n^x}$ est alternée à partir d'un certain rang $n_0(x)$.

On peut vérifier (par une étude de la fonction $n\longmapsto\dfrac{(\ln n)^p}{n^x}$) que $x\longmapsto n_0(x)$ est décroissante.

Donc $\forall n\geq n_0(a)$, $\sup_{x\geq a}\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(\ln k)^p}{k^x}\right|\leq\dfrac{(\ln n)^p}{n^a}$.

En effet, on a pour $x\geq a$, $n_0(a)\geq n_0(x)$, donc $\sum_{k=n}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(\ln k)^p}{k^x}$ vérifie le CSSA.

Donc la série $\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout intervalle $[a,+\infty[$ inclus dans $]0,+\infty[$.

On en déduit que G est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.

8) Exemple d'une série de fonctions solution d'une équation différentielle (ou intégrale)

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0(x)=g(x)$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,dt$.

Alors $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $[0,+\infty[$ vers la fonction f vérifiant $f(x)-\int_0^x f(t)\,dt=g(x)$.

En effet, on montre par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $\forall x\geq 0$, $|f_n(x)|\leq\dfrac{x^n}{n!}\sup_{[0,x]}|g|$.

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment $[0,a]$ (en effet, la série $\sum\frac{a^n}{n!}\sup_{[0,a]}|g|$ converge).

Donc $f=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n$ et on a par convergence normale $\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}f_{n+1}(x)=f(x)-f_0(x)$.

On en déduit que $f(x)-\int_0^x f(t)\,dt=g(x)$.

Remarque : Si g est de classe C^1, alors f est de classe C^1, et on a $f'(x)-f(x)=g'(x)$. De façon générale, cette technique permet de prouver l'existence de solutions des équations différentielles d'ordre 1.