Séries de fonctions

1) Convergence uniforme et convergence normale d'une série de fonctions

Pour $f : I \to \mathbb{R}$, on considère $\|f\|_\infty = \sup_I |f|$ la norme de la convergence uniforme.

a) *Convergence simple*

Définition : Soient des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

On dit que la série $\sum f_n$ converge simplement ssi pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge.

On note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la fonction définie sur I par $\forall x \in I$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Les sommes partielles sont les fonctions S_n définies par $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. Lorsque la série de fonctions converge, c'est-à-dire la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on définit la fonction reste R_n par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

b) *Convergence uniforme*

On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. Supposons que $\sum f_n$ converge simplement vers S. Posons $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$.

Def : On dit que $\sum f_n$ converge uniformément sur I ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

Ainsi, $\sum f_n$ converge uniformément sur I ssi $\lim_{n\to+\infty} \|S - S_n\|_\infty = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_\infty = 0$.

Exemple : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n+x)}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$, car $\forall x \in [0, +\infty[$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{(k+x)}\right| \le \dfrac{1}{n}$.

c) *Convergence normale*

Def : On dit que $\sum f_n$ converge *normalement* sur I ssi $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Exemple : La série de fonctions $\sum_{n\ge1} \dfrac{\sin(n\theta)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En effet, avec $f_n(\theta) = \dfrac{\sin(n\theta)}{n^2}$, on a $\sum_{n\ge1} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\ge1} \dfrac{1}{n^2}$, et la série converge.

Prop : Si $\sum f_n$ converge normalement, il existe $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ et $\sum f_n$ cv uniformément vers S

Preuve : Pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ cv absolument, car $|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

On a alors $\|S - S_n\|_\infty = \|R_n\|_\infty \le \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

IMPORTANT : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut converger uniformément sans que $\sum f_n$ converge normalement.

Par exemple, avec $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R} \quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n+x}$, on a $\|R_n\|_\infty \le \dfrac{1}{n}$, mais $\sum_{n\ge1} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\ge1} \dfrac{1}{n} = +\infty$.

IMPORTANT : Il arrive souvent que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de I, mais sans que $\sum f_n$ converge normalement sur I (de même qu'une fonction continue est bornée sur tout segment, mais pas nécessairement bornée sur son ensemble de définition).

2) Continuité et intégrale de la somme d'une série de fonctions convergeant uniformément

a) *Théorème de la double limite* (admis)

Soient $f_n : I \to \mathbb{R}$ et a adhérent à I (le théorème est souvent utilisé dans le cas où $a = +\infty$ ou $-\infty$).

$\boxed{\text{On suppose que } \sum f_n \text{ converge uniformément (ou normalement) vers } S \text{ et que } \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to a} f_n(x) = \lambda_n}$.

$\boxed{\text{Alors } \sum \lambda_n \text{ converge et } \lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n}$. Autrement dit, on a $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)\right)$.

Remarque pour le cas de la convergence normale : Supposons que $\sum \|f_n\|$ converge.

Alors $\sum |\lambda_n|$ converge nécessairement. En effet, par passage à la limite, $|\lambda_n| = \lim_{x\to a} |f_n(x)| \leq \|f_n\|$.

Exemple : Avec $f_n(x) = \dfrac{x}{n + n^2 x}$, alors $S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est définie sur $]0, +\infty[$, et $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

En effet, $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$, donc la convergence est normale. D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1/n^2$.

b) *Continuité d'une somme uniformément convergente de fonctions continues*

Prop : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues convergeant *uniformément* sur I vers une fonction S.

Alors S est continue est continue sur I.

Remarque : La continuité est une notion locale. D'où la variante suivante, *très utile en pratique* :

Prop : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues convergeant simplement sur un intervalle I vers une fonction S.

On suppose de plus que $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans I.

Alors S est continue sur I.

$\boxed{\text{Ainsi, la somme d'une série de fonctions continues } \textit{uniformément} \text{ convergente sur tout segment est continue}}$.

Preuve : Il s'agit d'une application directe de théorème de la double limite (avec ici $a \in I$).

Remarque : La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment, donc la limite S est continue.

Exemple : Considérons la fonction zéta de Riemann définie par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ définie pour $x > 1$.

Alors ζ est continue sur son ensemble de définition $]1, +\infty[$.

En effet, posons, pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = n^{-x}$. Les fonctions f_n sont continues sur $]1, +\infty[$.

De plus, la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$, où $a > 1$.

En effet, $\sum \sup_{[a,+\infty[} |f_n| = n^{-a}$ et la série $\sum n^{-a}$ est convergente.

On en déduit que ζ est continue (sur tout intervalle $]a, +\infty[$, donc sur $]1, +\infty[$).

c) *Intégrale d'une somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur un segment*

Prop : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément vers S sur un *segment* $[a, b]$.

$\boxed{\text{Alors } f \text{ est continue et } \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt}$. *Remarque* : Faux sur un intervalle quelconque.

Preuve : Il s'agit de prouver que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$. On a $\sum_{k=0}^{n} \int_a^b f_k(t)\,dt = \int_a^b S_n(t)\,dt$.

Et $\left|\int_a^b S(t)\,dt - \int_a^b S_n(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b (S - S_n)(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |R_n(t)|\,dt \leq (b-a) \sup_{[a,b]} |R_n| \to 0$.

Exemple : Soit une série complexe $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ absolument convergente, c'est-à-dire vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| < +\infty$.

Alors la fonction $S : \theta \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $\int_0^{2\pi} S(\theta)\ d\theta = 2\pi a_0$.

En effet, avec $f_n(\theta) = c_n e^{in\theta}$, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ sur $\mathbb{R}$.

Donc S est continue, et comme la convergence est normale (sur $[0, 2\pi]$), on a

$$\int_0^{2\pi} S(\theta)\ d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_n e^{in\theta}\ d\theta = 2\pi c_0, \text{ car } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\ d\theta = 0$$

3) Séries de fonctions de classe C^1 et C^∞

a) *Dérivée d'une série de fonctions*

Théorème : Soient des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1, pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose $\begin{cases} \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge simplement sur } I \text{ vers une fonction } S : I \to \mathbb{R}. \\ \boxed{\text{la série des fonctions dérivées } \sum f_n' \text{ converge uniformément sur } I} \end{cases}$

$\boxed{\text{Alors } S \text{ est de classe } C^1, \text{ et } S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'}$. De plus, $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I.

Preuve : On choisit $a \in I$. Pour $x \in I$, on a $f_n(x) - f_n(a) = \int_a^x f_n'(t)dt$,

D'où, par 2) b), en sommant, on a : $S(x) - S(a) = \int_a^x D(t)\ dt$, où $D = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Important : $\boxed{\text{Il suffit que la convergence uniforme soit vraie sur tout segment de } I}$.

Exemple : Pour $z \in \mathbb{C}$, $f : t \longmapsto \exp(tz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} t^n$ vérifie $f'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{(n-1)!} t^{n-1} = zf(t)$.

b) *Extension au cas des fonctions de classe C^∞*

Corollaire : Soient des fonctions $f_n : I \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, pour $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum f_n^{(p)}$ converge simplement, et que la convergence est uniforme pour p assez grand. Alors $S = \sum f_n$ est de classe C^∞, et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a $S^{(p)} = \sum f_n^{(p)}$.

4) Exemples

a) *Exemple de série où les séries des dérivées convergent normalement sur tout segment de I*

Exemple : $\boxed{\text{Considérons la fonction zéta de Riemann définie par } \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x} \text{ définie pour } x > 1}$.

La fonction f_n est de classe C^∞, et pour tout $p \in \mathbb{N}$ $f_n^{(p)}(x) = \dfrac{(-\ln n)^p}{n^x}$.

Pour $[a, b] \subset]1, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 1} (-\ln n)^p n^{-a}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[a, b]$.

Donc ζ est C^∞ sur $]1, +\infty[$, et que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\boxed{\zeta^{(p)}(x) = (-1)^p \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\ln n)^p}{n^x}}$. Ainsi, ζ est décroissante et convexe.

b) *Exemple d'étude d'une fonction définie par une série*

Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n + n^2 x}$.

S est continue sur $]0, +\infty[$ et décroissante :

La série de fonctions continues décroissantes converge normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$, avec $a>0$.

La limite de S en $+\infty$ vaut 0 (par interversion des limites). En fait, on a $S(x)\sim\dfrac{\pi^2}{6x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

En effet, on applique le th de la double limite en $+\infty$ à la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n+n^2x}$ normalement convergente.

Par ailleurs, on a $S(x)\sim-\ln x$ lorsque x tend vers 0 : On utilise $\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t+t^2x}\leq S(x)\leq\dfrac{1}{1+x}+\int_1^{+\infty}\dfrac{dt}{t+t^2x}$.

c) *Exemple de fonction définie sur* $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$

On considère $\forall x\geq 0$, $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{n-x}-\dfrac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n(n-x)}$.

La convergence est normale sur tout segment de $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$.

En effet, pour tout $n>\max(1,b)$, on a $\forall x\in[a,b]$, $\left|\dfrac{x}{n(n-x)}\right|\leq\dfrac{\max(|a|,|b|)}{n(n-b)}=O_{+\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n(n-x)}$ converge normalement sur $[a,b]$. On en conclut que S est continue sur $\mathbb{R}^+\setminus\mathbb{N}$.

Variante conseillée : La série tronquée $x\longmapsto\sum_{n\geq p}^{+\infty}\dfrac{x}{n(n-x)}$ converge normalement sur $[0,p+1[$.
Or, $S(x)=S_p(x)+\sum_{n>p}^{+\infty}\dfrac{x}{n(n-x)}$. Donc S est continue sur $[0,p+1[\setminus\mathbb{N}$. Mais p est arbitraire.

d) *Exemple de fonction définie par la somme d'une série alternée*

Exemple : On considère $\forall x>0$, $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$, où $f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x+n}$.

En effet, pour tout $x>0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{(-1)^n}{x+n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$, on a $\sup_{[a,b]}|f_n|=\frac{1}{a+n}$, donc $\sum\sup_{[a,b]}|f_n|$ diverge.

Ainsi, la série $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur le segment $[a,b]$.

En revanche, la suite des sommes partielles convergence uniformément.

En effet, posons $S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}f_k(x)$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}f_k(x)$.

On a $|S(x)-S_n(x)|=|R_n(x)|\leq\dfrac{1}{x+n+1}\leq\dfrac{1}{n+1}$, donc $\sup_{x>0}|S(x)-S_n(x)|\to 0$ lorsque n tend vers $+\infty$.

La continuité des S_n et la convergence uniforme de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers S assurent la continuité de S.

Complément culturel : Mais on pourrait aussi utiliser le th de continuité sur les séries en se ramenant à une série normalement convergente et à termes positifs, obtenue en regroupant les termes par deux.

En effet, on a $S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x+2k}-\frac{1}{x+2k+1}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k(x)$, où $\forall x>0$, $g_k(x)=\frac{1}{(x+2k)(x+2k+1)}$.

e) *Exemple de fonction définie par la somme d'une série indexée sur* $\mathbb{Z}$

Remarque : Par définition, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n$ converge ssi les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}a_{-n}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ convergent.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(x)=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$.

Alors $S(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(x+n)$ est définie pour tout $x\in\mathbb{R}$, et S est continue et 1-périodique.

- En effet, il existe $k\geq 0$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leq\dfrac{k}{x^2}$, car $x\longmapsto x^2f(x)$ est continue et bornée en $+\infty$ et $-\infty$.

Donc la convergence est normale sur tout segment $[-r, r]$ de $\mathbb{R}$.

En effet, pour $|n| > r$, on a $\forall x \in [-r, r, \ |f(x+n)| \leq \dfrac{k}{(|n|-r)^2}$. Et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{k}{(|n|-r)^2}$ converge.

Donc la série de fonctions $x \longmapsto f(x+n)$ converge normalement sur tout $[-r, r]$. Donc S est continue.

- On a d'autre part, $S(x+1) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+1+n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(x+m) = S(x)$, donc S est 1-périodique.

5) Obtention d'équivalents de fonctions définies par des séries en comparant avec des intégrales

a) *Exemple* : On considère la fonction zéta de Riemann $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$, définie pour tout $x > 1$.

Soit $x > 1$. L'application $t \longmapsto t^{-x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$. Donc $1 + \int_1^{+\infty} t^{-x}\ dt \leq \zeta(x) \leq \int_1^{+\infty} t^{-x}\ dt$.

Ainsi, $1 + \dfrac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$, d'où on déduit $\zeta(x) \sim \dfrac{1}{x-1}$ lorsque x tend vers 1^+.

b) *Exemple* : On considère $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors $S(x) \sim_{+\infty} \dfrac{\pi}{2x}$.

Pour $x > 0$, on a $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{x^2+t^2} \leq S(x) \leq \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{x^2+t^2}$. On en déduit $S(x) \sim \dfrac{\pi}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

c) *Exemple* : On considère $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+n}$, définie pour $x > 0$.

On a $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+2k)(x+2k+1)}$.

D'où $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(x+2t)(x+2t+1)} \leq S(x) \leq \dfrac{1}{x(x+1)} + \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(x+2t)(x+2t+1)}$.

Or, $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{(x+2t)(x+2t+1)} = \int_0^{+\infty} \left(\dfrac{1}{x+2t} - \dfrac{1}{x+2t+1}\right) dt = \left[\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+2t}{x+2t+1}\right)\right]_0^{+\infty} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

On en déduit que $S(x) \sim \dfrac{1}{2x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6) Exemples de séries de fonctions solutions d'équations fonctionnelles

Exemple : Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée.

Alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{g(2^n x)}{2^n}$ est l'unique fonction continue et bornée vérifiant $f(x) - \dfrac{1}{2}f(2x) = g(x)$.

En effet, d'une part on vérifie (par convergence normale) que f convient, et d'autre part la différence δ entre deux solutions vérifie par linéarité $\delta(x) = \frac{1}{2}\delta(2x)$, donc δ n'est bornée que si elle est identiquement nulle, d'où l'unicité.

Exemple : Soit un réel $0 < a < 1$.

La fonction $f(x) = \prod_{n=0}^{+\infty}(1 - a^n x)$ est l'unique fonction continue sur $[0, 1]$ vérifiant $f(x) = (1-x)f(ax)$ et $f(0) = 1$.

En effet, on a $\ln f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 - a^n x)$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in[0,1]} |\ln(1 - a^n x)| \leq \ln(1 - a^n) \leq a^n$. Et la série $\sum a^n$ converge.

Donc $\ln f$ est continue comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.

D'autre part $f(0) = 1$ et $f(ax) = \prod_{k=0}^{+\infty}(1 - a^{k+1}x) = \prod_{k=1}^{+\infty}(1 - a^k x)$, donc $f(x) = (1-x)f(ax)$.

Réciproquement, soit g une fonction continue vérifiant $g(x) = (1-x)g(ax)$.

Alors $g(x) = g(a^n x)\prod_{k=0}^{n-1}(1 - a^k x)$, et par continuité, $\lim_{n\to+\infty} g(a^n x) = g(0)$, donc $g(x) = \prod_{k=0}^{+\infty}(1 - a^k x)$.