Variables aléatoires

1) Variables aléatoires discrètes sur un espace probabilisé

a) Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire discrète X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est une application définie sur Ω dont l'image $E = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de E appartient à $\mathcal{A}$.

Remarque : Alors, pour toute partie $F \subset E$, $X^{-1}(F)$ est un événement de $(\Omega, \mathcal{A})$.

Notations :

- Pour tout $x \in E$, on pose $P(X = x) = P(X^{-1}(x))$.
- Pour toute partie F de E, on pose $P(X \in F) = P(X^{-1}(F))$.

Par exemple, si X est à valeurs réelles, $(X \geq x)$ désigne l'ensemble A des événements $\omega \in \Omega$ tels que $X(\omega) \geq x$, et $P(X \geq x)$ désigne $P(A)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un événement appartienne à A.

Remarque : On a $P(X \in F) = \sum_{x \in F} P(X = x)$ (la somme est bien définie, car $(P(X = x))_{x \in F}$ est sommable.

Par exemple, si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $P(X = n) = P(X > n - 1) - P(X > n)$.

b) Loi d'une variable aléatoire

Def : La loi d'une variable aléatoire discrète $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to E$ définit une loi sur E par : $x \longmapsto P(X = x)$

Def : Deux v.a. à valeurs dans E ont même loi ssi $\forall x \in E$, $P(X = x) = P(Y = x)$. On note $X \sim Y$.

Remarque : Pour tout $F \subset E$, on a $P(X \in F)$ est bien définie et $P(X \in F) = \sum_{x \in F} P(X = x)$.

2) Tribu associée à une variable aléatoire

a) En pratique, on définit souvent une variable aléatoire X à valeurs dans E par les probabilités $P(X = a)$, où $P(X = a)$ désigne la probabilité que X vaut a.

Les réels $P(X = a)$ appartiennent à $[0, 1]$, et la seule contrainte est d'avoir $\sum_a P(X = a) = 1$.

Exemple : Pour un tirage d'un entier sur $\{0, 1\}$, on définit $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

Considérons alors X définie sur Ω.

On note $\sigma(X)$ la plus petite tribu engendrée par les atomes $X^{-1}(a)$, où $a \in E$.

On obtient ainsi un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en définissant P par sa valeur sur les atomes $P(X^{-1}(a)) = P(X = a)$.

La tribu $\sigma(X)$ est formé des réunions (finies ou infinies) de parties de la forme $X^{-1}(a)$, où $a \in E$.

Autrement dit, $\sigma(X)$ est la tribu des $X^{-1}(F)$, où $F \subset E$.

Conséquence : Si $X : \Omega \to E = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, où les x_n sont distincts, et si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.

b) Considérons un événement A sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

La fonction caractéristique de A est la v.a. $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ $\omega \longmapsto 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon.

La tribu engendrée par 1_A est la tribu engendrée par A, c'est-à-dire $\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}\}$.

3) Couple de variables aléatoires

a) Loi conjointe de deux variables aléatoires

Def : Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ deux variables aléatoires discrètes sur un univers Ω.

Alors $(X,Y) : \Omega \to E \times E'$ $\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire sur Ω.

L'application $P_{X,Y} : E \times E' \to [0,1]$ $(x,y) \longmapsto P(X = x, Y = y)$ est appelée loi conjointe de (X,Y).

Terminologie : Les lois associés à X et Y sont alors appelées lois marginales de $Z = (X,Y)$.

Remarque : Posons $E = \{x_i,\ i \in I\}$ et $E' = \{y_j,\ j \in J\}$.

On représente souvent la loi conjointe par le tableau (p_{ij}), où $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

La somme de tous les p_{ij} vaut 1.

Important :

$P(X = x_i) = \sum_{j \in E} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} p_{ij}$ (somme selon la ligne $i \in I$).

$P(X = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$ (somme selon la colonne $j \in J$).

b) Loi conditionnelle marginale

On a $P(X \mid Y = y_j) = \dfrac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \dfrac{p_{ij}}{p_{*j}}$, où $p_{*j} = P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij}$.

Elles correspondent aux lois définies par une ligne ou une colonne (renormalisée).

c) Lois marginales d'une variable aléatoire $Z : \Omega \to E \times E'$

Posons $E = \{x_i,\ i \in I\}$ et $E' = \{y_j,\ j \in J\}$. On dispose des probabilités $p_{ij} = P(Z = (x_i, y_j))$.

Les marges (ou lois marginales) sont obtenues en sommant les p_{ij} par ligne ou par colonne.

Plus précisement, les lois marginales $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ sont définies par $\begin{cases} P(X = x_i) = \sum_{j \in J} p_{ij} \\ P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} p_{ij} \end{cases}$

Remarque : Des variables aléatoires $\Omega \to E \times E'$ peuvent être distinctes et avoir les mêmes lois marginales.

Par exemple, si $0 \leq p \leq q \leq 1$, $\begin{pmatrix} pq & (1-p)q \\ p(1-q) & (1-p)(1-q) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} p & q-p \\ 0 & 1-q \end{pmatrix}$ ont mêmes marges.

4) Variables aléatoires indépendantes

a) *Def* : Deux variables aléatoires $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to E'$ sont dites indépendantes si

$$\forall (x,y) \in E \times E',\ P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Remarque : Lorsque X et Y sont indépendantes, $(Y \mid X = x) = Y$.

Prop : Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour toute fonction f et g, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Preuve : $P(f(X) = a, g(Y) = b) = P(X \in f^{-1}(a), Y \in g^{-1}(b)) = P(X \in f^{-1}(a))P(Y \in g^{-1}(b))$.

b) Couple de deux variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes sont indépendantes ssi les p_{ij} sont de la forme

$$p_{ij} = p_i q_j$$

On a alors $p_i = P(X = x_i)$ et $q_j = P(Y = y_j)$.

Important : Pour toutes parties $A \subset E$ et $B \subset E'$, on a $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$.

En effet, $\sum_{(i,j)\in A\times B} p_i q_j = \left(\sum_{i\in A} p_i\right)\left(\sum_{i\in A} q_j\right)$.

c) Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Def : Des variables aléatoires $X_1, X_2, .., X_n$ sont mutuellement indépendantes ssi

$$P(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = P(X_1 = x_1)\ P(X_2 = x_2)\ ...\ P(X_n = x_n)$$

Remarque : Si X, Y et Z sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors (X, Y) et Z sont des variables aléatoires indépendantes. En particulier, pour toute fonction f définie $E \times E' \to E''$, $f(X, Y)$ et Z sont indépendants.

Par exemple, $\boxed{\text{si } X_1, ..., X_n \text{ sont mutuellement indépendants, } X_n \text{ est indépendant de } X_1 + ... + X_{n-1}}$.

Remarque : Des variables aléatoires (avec $n \geq 3$) deux à deux indépendantes ne sont pas nécessairement mutuellement indépendantes.

d) Espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes

Prop (admis) : Soit une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes. Alors il existe un espace probabilisé Ω et une suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a. (mutuellement indépendantes) sur cet espace Ω telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \sim Y_n$.

Exemple : Modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes. On a $X_n : \{0,1\} \to \{0,1\}$ définie par $P(X_n = 0) = p$ et $P(X_n = 1) = 1 - p$.

On considère alors $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à valeurs dans $\{0,1\}$ et $Y_n : \Omega \to \{0,1\}$ $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \longmapsto u_n$ est la variable aléatoire correspondant au n-ième tirage.

Par exemple, on a $P(Y_0 = 1, Y_0 = 1, ..., Y_{n-1} = 1) = p^n$. Si $p < 1$, on a $P((Y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to+\infty} p^n = 0$.

5) Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète à valeurs réelles

Soit $X : \Omega \to E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles, c'est-à-dire $E \subset \mathbb{R}$.

a) Opérations sur les variables aléatoires discrètes à valeurs réelles

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

Si X est une v.a.d. à valeurs réelles, il en est de même de la variable aléatoire $f(X) : x \longmapsto f(X(x))$.

- Plus généralement, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et si $X_1, ..., X_n$ sont des v.a.d. à valeurs réelles, il en est de même de $f(X_1, ..., X_n)$.

Exemple : Si X et Y sont des v.a.d. à valeurs réelles, (X, Y) est une v.a.d à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Et λX, $X + Y$ et XY sont des v.a.d. à valeurs réelles (où $\lambda \in \mathbb{R}$).

En particulier, l'ensemble des v.a.d. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est un sev (et même une sous-algèbre) de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

b) Espérance

Def : On dit que $X : \Omega \to E = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est d'espérance finie si $\sum_{x \in E} |x|\, P(X = x)$ converge.

Dans ce cas, on pose $\boxed{E(X) = \sum_{x \in E} xP(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\ P(X = x_n)}$.

Remarque : Comme les termes sont positifs, la valeur de la somme (finie ou infinie) ne dépend pas de l'ordre des termes. Autrement dit, X est d'espérance finie ssi la famille $(xP(X = x))_{x \in E}$ est sommable.

Propriété : Soient X et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des v.a.d. d'espérance finie.

- Linéarité de l'espérance : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, $E(\lambda X) = \lambda E(X)$

En particulier, en posant $m = E(X)$, la v.a. $X - m$ (qu'on devrait noter $X - \widetilde{m}$) est d'espérance nulle.

- Positivité : Si $X \geq \widetilde{0}$, alors $E(X) \geq 0$, avec égalité ssi X est nulle presque partout, c'est-à-dire $P(X \neq 0) = 0$.

- Croissance de l'espérance : Si $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème de comparaison :

$\boxed{\text{Si } |X| \leq Y \text{ et } Y \text{ d'espérance finie, alors } X \text{ est d'espérance finie et } |E(X)| \leq E(Y)}$.

Ainsi, $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$ des v.a. d'espérance finei (= de moment d'ordre 1 fini) est un sev de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})$.

Et $X \longmapsto E(X)$ est une forme linéaire sur cet espace. De plus, elle est définie positive, au sens où $X \geq 0$ implique $E(X) \geq 0$, avec égalité ssi $X = 0$ presque sûrement, c'est-à-dire ssi $P(X = 0) = 0$.

Terminologie : $X - \mu$ est d'espérance nulle (variable centrée) ssi $\mu = E(X)$.

On dit que $X - \mu$ est la variable centrée associée à X.

c) Théorème du transfert : Soit $X : \Omega \to \gneqq \subset \mathbb{E} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $f : \gneqq \to \mathbb{R}$.

Th : La v.a. $f(X) : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie ssi $\sum_{x \in E} |f(x)|\, P(X = x)$ converge, et dans ce cas

$$E(f(X)) = \sum_{x \in E} f(x) P(X = x)$$

Preuve : L'idée est de regrouper dans la somme $\sum_{x \in E} f(x)P(X = x)$ les termes selon la valeur de $f(x)$.

Par sommation par paquets, on a

$$\sum_{x \in E} |f(x)| P(X = x) = \sum_{y \in f(E)} \sum_{f(x)=y} |f(x)| P(X = x) = \sum_{y \in f(E)} |y| P(f(X) = y)$$

La première somme converge ssi les deux autres convergent. On obtient alors :

$$\sum_{x \in E} f(x)P(X = x) = \sum_{y \in f(E)} \sum_{f(x)=y} f(x)P(X = x) = \sum_{y \in f(E)} yP(f(X) = y) = E(f(X))$$

Exemple d'utilisation : Preuve de la linéarité de l'espérance :

On considère $Z = (X, Y)$, et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto x + y$.

Ainsi, $f(Z) = X + Y$. On a donc $E(X + Y) = \sum_{(x,y) \in E \times F} (x + y)P(X = x, Y = y)$.

Avec $g(Z) = X$, on a de même $E(X) = \sum_{(x,y) \in E \times F} xP(X = x, Y = y)$. De même pour $E(Y)$.

Donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Exemple d'utilisation :

On prend $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \longmapsto xy$ pour prouver $E(XY) = E(X)E(Y)$ pour X et Y indépendantes.

d) Moments d'ordre 2, sev $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$

Def : $E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 P(X = x_n)$ est appelé le moment d'ordre 2 de X.

On dit que X admet un moment d'ordre 2 ssi $E(X^2) < +\infty$, c'est-à-dire ssi $\sum x_n^2 P(X = x_n)$ converge.

Prop : $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y : \Omega \to \mathbb{R} \text{ admettent un moment d'ordre 2, alors } XY \text{ est d'espérance finie}}$.

Preuve : $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$.

Corollaire : Si $E(X^2) < +\infty$, alors $X = X.1$ est d'espérance finie, et $|E(X)| \leq E(|X|) \leq \sqrt{E(X^2)}$.

Corollaire : $\boxed{\text{L'ensemble } \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ des v.a. de moment d'ordre 2 fini est un sev de } \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{R})}$.

Remarque : Les fonctions constantes $\widetilde{m}$ appartiennent à $\mathcal{L}^2(\Omega)$, car $E(\widetilde{m}) = m^2 P(\Omega) = 1$.

Important : L'application $f : \langle X, Y \rangle \longmapsto E(XY)$ est bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

En particulier $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2 \sum_{i<j} E(X_i X_j)$.

On a donc $\boxed{\text{l'inégalité de Cauchy-Schwarz : } E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2)}$.

Complément : On identifie les variables aléatoires X et Y telles que $P(X = Y) = 1$.

On dit que X et Y sont égales presque surement. Alors $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur le sev $\mathcal{L}^2(\Omega)$.

e) Variance

Def et prop : Si $E(X^2) < +\infty$, alors X est d'espérance finie.

On pose $\boxed{V(X) = E((X-\mu)^2)}$, où $\mu = E(X)$.

$V(X)$ est appelé variance de X, et on a $\boxed{V(X) = E(X^2) - m^2}$.

Preuve : Si $E(X^2) < +\infty$, alors X est d'espérance finie (car $X = X.\widetilde{1}$ et $\widetilde{1} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$).

Remarque : Réciproquement, si $(X - m) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, alors $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathbb{R})$, car $\widetilde{m} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$.

Def : On définit l'écart type par $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$.

Remarque : Plus la variance est petite et plus la variable aléatoire est concentrée autour de sa moyenne.

Propriétés : Pour λ et μ réels, et $X \in \mathcal{L}^2_P(\Omega)$, on a $V(X+\mu) = V(X)$ et $V(\lambda X) = \lambda^2 V(X)$.

Remarque : Ainsi, $V(\lambda X + \mu) = \lambda^2 V(X)$.

f) Covariance, espérance et variance d'une somme

Covariance : $\boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) = E(XY) - \mu_{X\mu Y}}$, où $m_X = E(X)$.

Prop : $\boxed{E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n E(X_i) \text{ et } V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)}$.

En effet, en notant $X_i = X_i' + m_i$, on a $V(X) = \langle X', X' \rangle$.

f) Corrélation

Def : Le coefficient de corrélation est $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.

On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $f : \langle X, Y \rangle^2 \leq \langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle$.

Prop : $\boxed{|\rho_{X,Y}| \leq 1}$, avec égalité ssi X et Y sont égales (presque surement)

6) Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Soit $X : \Omega \to E = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une variable aléatoire discrète à valeurs réelles.

a) Inégalité de Markov

Prop : $\boxed{P(X \geq a) \leq \dfrac{E(X)}{a}}$.

Preuve : $E(X) \geq \sum_{x \geq a} xP(X = x) \geq \sum_{x \geq a} aP(X = x) = aP(X \geq a)$.

b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Prop : Posons $\mu = E(X)$. Alors $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}}$.

Preuve : $P((X-\mu)^2 \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{E((X-\mu)^2)}{\varepsilon^2}$.

Remarque : $P(S \geq n\varepsilon) \leq \dfrac{E(e^{tS})}{e^{nt\varepsilon}}$. Si $S = (X_1 + X_2 + ... + X_n)$, où X_i i.i.d. , alors $P(S \geq n\varepsilon) \leq \dfrac{E(e^{tX})^n}{e^{nt\varepsilon}}$.

7) Variance de variables aléatoires discrètes indépendantes

a) *Prop* : $\boxed{\text{Si } X \text{ et } Y \text{ sont deux variables aléatoires discrètes réelles indépendantes, alors } E(XY) = E(X)E(Y)}$

Corollaire : Si les X_i sont mutuellement indépendantes, alors $E(X_1...X_n) = E(X_1)...E(X_n)$.

En effet, X_n est indépendant de $X_1X_2...X_{n-1}$, et on procède par récurrence sur n.

Remarque : Plus généralement, si les $f_i : E \to D$, et les X_i sont mutuellement indépendantes, alors

$$E\left(\prod_{i=1}^{d} f_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{d} E\left(f_i(X_i)\right).$$

En effet, les $f_i(X_i)$ sont mutuellement indépendantes.

b) *Prop* : $\boxed{\text{Si les } X_i \text{ sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes, alors } V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i).}$

8) Variables aléatoires identiquement distribuées

Def : On dit que deux v.a. X et Y à valeurs dans E sont identiquement distribuées ssi elles ont même loi, c'est-à-dire

si

$\forall x \in E,\ P(X = x) = P(Y = x)$.

Prop : Si les X_i sont des v.a. à valeurs réelles et i.d.d (indépendantes et identiquement distribuées), alors

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n\mu \text{ et } V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = nv$$

où μ et v sont l'espérance et la variance de la loi des X_i.

Exemple : Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.

9) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

On considère des v.a.d. définies à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. On pose $\boxed{a_n = P(X = n)}$.

a) Espérance

Prop : $\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X \geq n+1)}$.

Preuve : En posant $a_n = P(X = n)$ et $A_n = P(X \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} a_n$, alors la transformée d'Abel donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(A_n - A_{n+1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n$$

b) Série génératrice

On pose $\boxed{G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$. En particulier, $G_X(1) = 1$. On considère désormais G_X définie sur $[0,1]$.

Prop : $\boxed{\text{L'espérance est } E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n = G'_X(1)}$.

Remarque : $E(X)$ est finie ssi $G'_X(1)$ existe. En effet, la convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n$ équivaut à la convergence normale de la série des dérivées $\sum na_n x^{n-1}$ sur $[0,1]$.

Remarque : Plus généralement le moment d'ordre r est $M(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^r a_n z^n$. Il est fini ssi $G_X^{(r)}(1)$ existe.

En particulier, $M(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n z^n = G''_X(1) + G'_X(1)$.

Prop : $\boxed{\text{La variance est } V(X) = E(X - E(X)) = E(X^2) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2}$.

<u>c) Série génératrice de $X + Y$, où X et Y sont indépendantes</u>

Prop : On suppose X et Y indépendantes.

Alors $S = X + Y$ suit la loi $P(S = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k)$. Donc $\boxed{G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)}$

Exemples fondamentaux :

- Une v.a. de Bernoulli de paramètre p admet pour série génératrice $G_X(z) = 1 - p + pz$.

Une somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ de v.a. de Bernoulli i.d.d. de paramètre p admet pour série génératrice

$$G_S(z) = G_X(z)^n = (1 - p + pz)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 - p)^{n-k} p^k z^k$$

Autrement dit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, c'est-à-dire S suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

- Une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ admet pour série génératrice $G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} z^k = e^{\lambda(z-1)}$.

Une somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ de v.a. de Poisson mutuellement indépendantes et de paramètres respectifs p_1, p_2, ... p_n admet pour série génératrice $G_S(z) = e^{\lambda(z-1)}$, où $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

Donc $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire S suit une loi binomiale de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.