Séries génératrices et fonctions caractéristiques

1) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

On considère des v.a.d. définies à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. On pose $\boxed{a_n = P(X = n)}$.

a) Espérance

Prop : On suppose que $\sum n a_n < +\infty$. Alors $\boxed{E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)}$.

Illustration :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \dots & & \dots \\ & & & a_4 & a_5 & \to & R_3 \\ & & a_3 & a_4 & a_5 & \to & R_2 \\ & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \to & R_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \to & R_0 \end{array}$$

Preuve : En posant $a_n = P(X = n)$ et $R_n = P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$, alors la transformée d'Abel donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(R_{n-1} - R_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_n$$

Pour prouver la relation, il convient de passer par des sommes finies :

On a $\sum_{n=0}^{N} n a_n = \sum_{n=1}^{N} n(R_{n-1} - R_n) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)R_n - \sum_{n=1}^{N} nR_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n - NR_N$.

Or, $NR_N = N \sum_{n=N+1}^{+\infty} P(X = n) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} nP(X = n)$ qui tend vers 0 comme le reste de la série $\sum n a_n$.

Remarque : De façon analogue, si $\sum n a_n < +\infty$, alors $V(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)^2 - n^2)R_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)R_n$

b) Série génératrice

On pose $\boxed{G_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$. En particulier, $G_X(1) = 1$.

L'application G_X est continue sur $[0, 1]$ (cf série normalement convergente de fonctions continues).

Prop : $E(X)$ est finie ssi $\sum n a_n$ converge. $\boxed{\text{Dans ce cas, } G_X \text{ est dérivable en 1, et } G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n}$.

Remarque : $\sum n a_n$ converge donc la série des dérivées $\sum n a_n x^{n-1}$ converge normalement sur $[0, 1]$.

Donc G_X est de classe C^1 sur $[0, 1]$, et $G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n$.

Prop (admise) : G_X est dérivable en 1 si et seulement si $\sum n a_n$ converge, c'est-à-dire ssi $E(X)$ est finie.

Remarque : Plus généralement le moment d'ordre r est $M(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^r a_n z^n$. Il est fini ssi $G_X^{(r)}(1)$ existe.

En particulier, $M(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n z^n = G''_X(1) + G'_X(1)$.

Prop : $\boxed{\text{La variance est } V(X) = E(X - E(X)) = E(X^2) - E(X)^2 = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2}$.

c) Série génératrice de $X + Y$, où X et Y sont indépendantes

Prop : On suppose X et Y indépendantes.

Alors $S = X + Y$ suit la loi $P(S = n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k)$. Donc $\boxed{G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)}$

Preuve directe : z^X et z^Y sont indépendantes, donc $G_X(z)G_Y(z) = E(z^X)E(z^Y) = E(z^{X+Y}) = G_{X+Y}(z)$.

Exemples fondamentaux :

- Une v.a. de Bernoulli de paramètre p admet pour série génératrice $G_X(z) = 1 - p + pz$.

Une somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ de v.a. de Bernoulli i.d.d. de paramètre p admet pour série génératrice

$$G_S(z) = G_X(z)^n = (1 - p + pz)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k z^k$$

Autrement dit $S = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$, c'est-à-dire S suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

- Une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda \geq 0$ admet pour série génératrice $G_X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} z^k = e^{\lambda(z-1)}$.

Une somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ de v.a. de Poisson mutuellement indépendantes et de paramètres respectifs p_1, p_2, ... p_n admet pour série génératrice $G_S(z) = e^{\lambda(z-1)}$, où $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.

Donc $S \sim \mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire S suit une loi binomiale de paramètre $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$.