Chaînes de Markov homogène sur un ensemble fini

1) Définitions

Def : Soit $E = \{1, 2, , ..., N\}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E.

Une chaîne de Markov homogène sur E est une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires $X_k : \Omega \to E$ vérifiant:

(i) *Propriété d'indépendance au passé* : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (i_0, i_1, ..., i_k, j) \in E^{n+2}$,

$$P(X_{n+1} = i \mid X_0 = j_0, X_1 = j_1, ..., X_n = j_n) = P(X_{n+1} = i \mid X_n = j_n)$$

Autrement dit, la valeur de X_{n+1} relativement aux valeurs de $(X_0, X_1, ..., X_n)$ ne dépend que de celle de X_n.

(ii) *Propriété d'homogénéité dans le temps* : Il existe $(a_{ij})_{(i,j)\in E^2}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\forall (i,j) \in E^2, \quad P(X_{n+1} = i \mid X_n = j) = a_{ij}}$$

2) Loi de X_n

a) **Matrice des transitions** : $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq N, 1\leq \S N} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$.

On a $\forall j$, $\sum_{i=1}^N a_{ij} = \sum_{i=1}^N P_{X_n=j}(X_{n+1} = i) = 1$. Ainsi, les sommes par colonne valent 1.

La matrice $B = A^T$ est *stochastique* : Les b_{ij} sont positifs, et les sommes $\sum_{j=1}^N b_{ij}$ par ligne valent 1.

Propriété des matrices stochastiques :

1 est valeur propre, et toutes les valeurs propres complexes sont de module ≤ 1.

De plus, si les coefficients diagonaux sont > 0, alors 1 est l'unique valeur propre de module 1.

Preuve : Le vecteur $(1, 1, ..., 1) \in E_1$.

Pour tout valeur propre λ de B, on montre qu'il existe i tel que $|\lambda - b_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} b_{ij}$.

Donc $|\lambda| \leq \sum_{j=1}^N b_{ij} = 1$, avec comme seul cas d'égalité $\lambda = 1$ lorsque $b_{ii} > 0$.

Remarque : On peut montrer aussi que si tous les coefficients b_{ij} sont > 0, 1 est racine *simple* de χ_B.

Important : Comme A et B ont mêmes polynôme caractéristique, les propriétés s'appliquent aussi à A.

b) **On considère la loi de X_n, représentée par le vecteur** $\boxed{Z_n = (P(X_n = i))_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^N}$.

Par la propriété (ii) et la formule des probabilités totales, on a $Z_{n+1} = AZ_n$, donc $Z_n = A^n Z_0$.

En effet, $\boxed{P(X_{n+1} = i) = \sum_{j=1}^N P(X_{n+1} = i \mid X_n = j)P(X_n = j) = \sum_{j=1}^N a_{ij}P(X_n = j).}$

c) **Propriétés de** $Z_\infty = \lim_{n\to+\infty} Z_n$ (si cette limite existe).

On suppose ici que $Z_\infty = \lim_{n\to+\infty} Z_n$ existe. C'est notamment le cas lorsque $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Prop : La loi limite est invariante par A : Le vecteur $Z_\infty \in \mathrm{Ker}(A - I_N)$, c'est-à-dire $\boxed{AZ_\infty = Z_\infty}$.

Remarque : L'ensemble des lois $\Delta = \{(z_1, ..., z_N) \in \mathbb{R}^N \mid \forall k,\ z_k \geq 0 \text{ et } z_1 + z_2 + ... + z_N = 1\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^N$ et est stable par A.

Preuve de la prop : On a $Z_\infty = AZ_\infty$ par passage à la limite de $Z_{n+1} = AZ_n$.

D'autre part, Z_∞ est limite des lois $Z_n \in \Delta$, donc est une loi (car Δ est une partie fermée).

($\bigstar$) *Prop* : Pour toute matrice ligne vérifiant $LA = L$, on a $LZ_\infty = LZ_0$.

Remarque : $LA = L$ ssi $L \in \mathrm{Ker}(A^T - I_N)$.

Preuve de la prop : Lorsque $LA = L$, alors $LZ_{n+1} = LZ_n$, d'où $LZ_\infty = LZ_0$ par passage à la limite.

d) **Condition suffisante d'existence d'une loi limite**

Supposons que 1 est l'unique valeur propre de A de module 1.

Supposons aussi que A soit diagonalisable, de vecteurs propres $Y_1, ..., Y_N$.

Considérons $Z_0 = \sum_{j=1}^N \alpha_j Y_j$ la décomposition de Z_0 dans la base de vecteurs propres $(Y_1, ..., Y_N)$.

Alors $Z_n = A^n Z_0 = \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j^n Y_j$, et $\lambda_j^n \to 0$ ou bien vaut 1 (selon que $|\lambda_j| < 1$ ou $\lambda_j = 1$).

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} Z_n$ existe (c'est d'ailleurs le projeté de Z_0 sur E_1 parallèlement à $\oplus_{\lambda\neq 1} E_\lambda$).

Remarque : En termes matriciels, avec $A = PDP^{-1}$, $\lim_{n\to+\infty} A^n = PJ_rP^{-1}$ matrice de projection.

3) Exemples

a) Transmission d'un bit informatique

On étudie la transmission d'un bit informatique 0-1 en supposant qu'à chaque étape, le bit est modifié de 0 en 1 avec la probabilité p, et modifié de 1 en 0 avec la probabilité q.

L'ensemble des états est donc ici $E = \{0, 1\}$, et la matrice de transition est $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$.

Supposons $0 < p + q < 2$. On a $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Ker}(A^T - I_2) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De plus, A est diagonalisable à $\mathrm{Diag}(1, \lambda)$, avec $\lambda = 1 - (p+q) \in]-1, 1[$.

Donc $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et Z_∞ existe De plus, $Z_\infty = (\alpha, \beta) \in E_1$ et vérifie $\alpha + \beta = 1$. D'où $Z_\infty = \dfrac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Remarque : De façon générale, si E_1 est une droite vectorielle et si Z_∞ existe, alors Z_∞ est l'unique loi invariante par A, c'est-à-dire l'unique vecteur de E_1 sont la somme des coefficients vaut 1.

b) Problème de la ruine d'un joueur

Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Un joueur disposant initialement de a jetons, vérifiant $0 < a < N$, joue un jeton à chaque étape, avec une probabilité p de le perdre et $q = 1 - p$ de gagner un nouveau jeton. On suppose $p \neq q$, et $0 < p < 1$.

La partie s'arrête soit lors de la ruine du joueur (0 jeton) soit lors de l'obtention de N jetons.

On note X_n la variable aléatoire représentant le nombre de jetons à la n-ième étape.

Ainsi, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov homogène sur $E = \{0, 1, ..., N\}$ dont la matrice des transitions est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & \vdots \\ 0 & q & \ddots & p & 0 \\ \vdots & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & q & 1 \end{pmatrix}$$

On a $E_1 = \mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(e_0, e_N)$ où $e_0 = (1, 0, ..., 0, 0)$ et $e_N = (0, 0, ..., 0, 1)$.

On peut montrer que $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (résulte en fait de $0 < p < 1$), donc qu'il existe $Z_\infty = \lim_{n\to+\infty} Z_n$.

On a alors $Z_\infty \in E_1 = \mathrm{Vect}(e_0, e_N)$, c'est-à-dire $Z_\infty = (\alpha, 0, 0, ..., 0, 0, \beta)$.

D'autre part, on a : $\mathrm{Ker}(A^T - I) = \mathrm{Vect}(\Omega, W)$, où $\Omega = (1, ..., 1)$ et $W = (1, \tau, \tau^2 ..., \tau^N)$, où $\tau = \frac{p}{q}$.

On a ainsi $\Omega Z_\infty = \Omega Z_0$ et $W Z_\infty = W Z_0$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha + \beta\tau^N = \tau^a$, car $Z_0 = E_a$ vecteur canonique.

4) Loi conditionnelle de X_n ($\bigstar$)

Jusqu'ici, on a seulement utilisé (ii).

La propriété suivante qui utilise aussi (i) n'est pas nécessairement vraie si on suppose seulement (ii).

Prop : Notons $a_{ij}^{(n)}$ les coefficients de A^n. Alors $\boxed{P(X_n = i \mid X_0 = j) = a_{ij}^{(n)}}$.

Lemme **:** Si $(B_k)_k$ système complet, alors $\boxed{P(A \mid C) = \sum_k P(A \mid B_k \cap C)\ P(B_k \mid C)}$.

dem (*lemme*) :Il suffit en effet d'appliquer la formule des probabilités totales à P_C.

dem (*prop*) : On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

On a par le lemme $P(X_{n+1} = i \mid X_0 = j) = \sum_{k\in E} P(X_{n+1} = i \mid X_n = k, X_0 = j)P(X_n = k \mid X_0 = j)$.

Or, $P(X_{n+1} = i \mid X_n = k, X_0 = j) = P(X_{n+1} = i \mid X_n = k) = a_{ik}$ et $P(X_n = k, X_0 = j) = a_{kj}^{(n)}$ par hyp de rec.