Lois usuelles

Notation : Si $X : \Omega \to E$ est une v.a. et $\mathcal{L}$ une loi, la notation $X \hookrightarrow \mathcal{L}$ signifie que la loi de X est $\mathcal{L}$.

Si X et Y sont deux v.a., la notation $X \sim Y$ signifie que X et Y ont même loi.

Des v.a. sont i.i.d. ssi elles sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées (= de même loi).

Lois	**Univers** E	
Loi de Rademacher (pile ou face)	$\{-1, 1\}$	$P(X=1) = P(X=-1) = \frac{1}{2}$
Loi uniforme	E fini	$P(X=x) = \frac{1}{n}$, avec $\operatorname{card} E = n$
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$	$\{0, 1\}$	$P(X=1) = p$ et $P(X=0) = q$, avec $q = 1-p$
Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$	$\{0, 1, 2, ..., n\}$	Pour $0 \leq k \leq n$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
Loi géométrique (premier succès) : $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = q^{k-1}p$; $P(X > k) = q^k$
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \geq 0$	$\mathbb{N}$	Pour $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$

Remarque : Il y a une variante de la loi géométrique définie sur $\mathbb{N}$, avec $P(X=k) = q^k p$.

Lois	**Génératrice**	**Espérance**	**Variance**
Loi de Rademacher (pile ou face) :		0	1
Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, avec $p \in]0,1[$	$(1-p+pz)$	p	p
Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$	$(1-p+pz)^n$	np	$n(p-p^2)$
Loi géométrique : $\mathcal{G}(p)$	$pz/(1-qz)$	$1/p$	
Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \geq 0$	$e^{\lambda(z-1)}$	λ	λ

1) Loi uniforme sur un ensemble fini E non vide : $P(X=x) = \frac{1}{n}$, où $n = \operatorname{card} E$.

La loi de Rademacher (= loi du pile ou face) est la loi de probabilité uniforme sur $\{-1, 1\}$.

Espérance et variance : $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. Série génératrice (HP) : $G_X(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$.

2) Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p) = \mathcal{B}(1,p)$, où $p \in]0,1|$.

Univers $E = \{0, 1\}$. Loi $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$.

Espérance : $E(X) = p$ et variance $V(X) = p - p^2 = pq$.

Série génératrice : $G_X(t) = (q + pt)$.

3) Loi binomiale : $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$

Univers $E = \{0, 1, ..., n\}$.

Loi : $\boxed{\forall k \in \{0, 1, ..., n\},\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$.

Série génératrice : $G_X(z) = (q + pt)^n$. Espérance $E(X) = G'_X(1) = np$.

Exemple : Comptage d'un caractère dans un tirage avec remise :

La loi binomiale est la loi de la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.

Autrement dit, X correspond au nombre de 1 dans un tirage de Bernoulli répété n fois.

Variance : $V(X) = np(1-p)$, car $p(1-p)$ est la variance des v.a. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

4) Loi géométrique : $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1]$

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables indépendantes suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, on définit :

$\boxed{N = \inf\{k \in \mathbb{N}^* \mid X_k = 1\} \text{ : indice du premier succès, et } M = N - 1 \text{ : nombre d'échecs avant le premier succès}}$.

On prend $p \in]0,1]$. Ainsi, $P(N = +\infty) = \lim_{k \to +\infty} q^k = 0$. Donc N est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et M est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Loi : On pose $q = 1-p$. On a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(N=k) = q^{k-1}p$, et de même $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(M=k) = q^k p$.

$\boxed{\text{On a } \forall k \in \mathbb{N},\ P(N > k) = q^k}$ et $P(M \geq k) = q^k$.

Espérance : $E(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N > k) = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$. De même, $E(M) = E(N) - 1 = \dfrac{q}{p}$.

Série génératrice et variance : $G_N(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}z^k = \dfrac{pz}{1-qz} = zG_M(z)$, avec $\boxed{G_M(z) = \dfrac{p}{1-qz}}$.

D'où la variance $V(N) = V(M) = G''_M(1) + G'_M(1) - G'_M(1)^2 = p\left(\dfrac{2q^2}{p^3} + \dfrac{q}{p^2}\right) - \dfrac{q^2}{p^2} = \dfrac{2q^2 + pq - q^2}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$.

Remarque culturelle : On a $P(M \geq j + k \mid M \geq j) = q^k$.

Réciproquement, si une v.a.d sur $\mathbb{N}$ vérifie $P(X \geq j + k \mid X \geq j) = P(X \geq k)$, alors la loi de X est géométrique.

En effet, dans ce cas, on a $P(X \geq j+1) = qP(X \geq j)$, où $q = P(X \geq 1)$. Donc $P(X \geq k) = q^k$, car $P(X \geq 0) = 1$.

5) Loi binomiale négative

Il s'agit de la loi d'une somme $S = M_1 + ... + M_r$ de r variables aléatoires indépendantes de loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Il correspond la loi du r-ième succès dans une suite de v.a. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

Plus précisement, S est le nombre d'échecs (c'est-à-dire de 0) avant d'obtenir le r-ième succès (c'est-à-dire 1) :

Ainsi, $S + r = \min\{k \in \mathbb{N} \mid X_1 + X_2 + ... + X_k = r\}$.

La série génératrice est $G_S(z) = \left(\dfrac{p}{1-qz}\right)^r$, donc $P(S = n) = p^r q^n \dfrac{r(r+1)...(r+n-1)}{n!} = p^r q^n \binom{r+n-1}{n}$.

Argument combinatoire :

La probabilité d'avoir r chiffres 1 dans $(X_1, ..., X_{n+r})$ dont 1 en dernier vaut $p^r q^n \binom{r+n-1}{n}$.

6) Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Ensemble des valeurs $E = \mathbb{N}$. Loi : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}. \text{ Série génératrice : } G_X(z) = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}}$

Espérance : $E(X) = G'_X(1) = \lambda$ et variance : $V(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

La loi de Poisson permet de modéliser aussi bien le nombre d'événements (indépendants) survenant pendant un temps donné que le nombre d'éléments présents dans un espace délimité. Plus précisement, avec $\lambda = \tau\Delta$, $\mathcal{P}(\lambda)$ modélise le nombre d'événements survenus pendant une période Δ avec un taux de τ événements par unité de temps.

La loi de Poisson vérifie la propriété caractéristique d'additivité $\mathcal{P}(\lambda) + \mathcal{P}(\lambda') = \mathcal{P}(\lambda + \lambda')$, cohérente avec la modélisation : le nombre d'événements survenus pendant la durée $\Delta + \Delta'$ est la somme des nombres d'événements survenus (supposés indépendants) pendant les durées Δ et Δ'. De même, si on superpose deux phénomènes de Poisson de taux respectifs τ et τ', on obtient un phénomène de Poisson de taux $\tau + \tau'$:

- *Propriété importante des lois de Poisson* :

Une somme $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ de v.a. indépendantes et de lois $\mathcal{P}(\lambda_i)$ suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_n$.

Preuve : Avec les séries génératrices : Résulte de $e^{\lambda_1(t-1)}...e^{\lambda_n(t-1)} = e^{\lambda(t-1)}$.

- *Loi des événements rares* :

Approximation de $\mathcal{B}(n, p_n)$ par $P(\lambda)$ lorsque $n \to +\infty$, en supposant $p_n \sim \dfrac{\lambda}{n}$.

Preuve : Pour k fixé, on a : $\binom{n}{k}(1-p_n)^{n-k}(p_n)^k = \binom{n}{k}\left(1 - \dfrac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)^k \sim \dfrac{n^k}{k!}e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{n^k} = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Variante par les séries génératrices (justification HP) : $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}(z-1) + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^n = e^{\lambda(z-1)}$.