## Séries dans un evn de dimension finie

### 1) Définition et propriété fondamentale en dimension finie

*Définition* : La série $\sum x_n$ de vecteurs de $E$ converge ssi il existe $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x_k$.

*Propriété fondamentale* : Si la série $\sum \|x_n\|$ converge, alors $\sum x_n$ converge (on dit qu'elle converge absolument).

*Remarque* : Un evn est dit complet ssi il vérifie cette propriété.

*Preuve* : Quitte à choisir une base, on se ramène au cas de $E = \mathbb{R}^p$.

Comme toutes les normes sont équivalentes,on peut supposer que $E$ est muni de la norme $\| \ \|_\infty$ .

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteur de $\mathbb{R}^p$ telles que $\sum \|X_n\|$ converge.

Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des premières coordonnées, c'est-à-dire $X_n = (x_n, ...) \in \mathbb{R}^p$.

Comme $|x_n| \leq \|X_n\|$, alors $\sum |x_n|$ converge. Donc $\sum x_n$ converge (propriétés des séries numériques).

Il en est de même de chaque suite des coordonnées. Donc les $p$ suites de $\sum X_n$ convergent.

On en déduit que $\sum X_n$ converge.

*Remarque* : Pour prouver que $\sum x_n$ converge, une solution consiste à considérer la série $\sum(x_n + \|X_n\|)$, qui est à termes positifs, donc converge (comme suite réelle croissante majorée par $2\sum_{n=0}^{+\infty}\|X_n\|$).

### 2) Séries géométriques dans une algèbre normée de dimension finie

Considérons $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie, par exemple $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$.

On suppose $\mathcal{A}$ muni d'une $\boxed{\text{norme d'algèbre } \| \ \|}$, c'est-à-dire vérifiant $\boxed{\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|}$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ .

Alors, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathcal{A} \text{ tel que } \|x\| < 1\text{, l'élément } (1-x) \text{ est inversible, et } (1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$.

En effet, $\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ converge absolument, car $\|x\| < 1$, et $\mathcal{A}$ est un espace complet (dimension finie).

D'autre part $(1-x)(\sum_{k=0}^{n} x^k) = 1 - x^{n+1}$, et $\lim_{n\to+\infty}\|x\|^{n+1} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = 0$.

On en conclut que $(1-x)(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k) = 1$. De même, $(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k)(1-x) = 1$.

*Exemple* : Supposons $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni d'une norme d'algèbre $\| \ \|$, par exemple $\|A\| = p\sup|a_{ij}|$.

Alors, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\|A\| < 1$, on a $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

Comme dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, toute norme $N$ est équivalente à $\| \ \|$, alors pour $N(A)$ assez petit, on a $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

### 3) Exemple : exponentielle de matrices

On considère $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Comme $E$ est de dimension finie, $E$ est complet (pour toute norme).

$\boxed{\text{On choisit une norme d'algèbre } \| \ \|\text{, c'est-à-dire une norme vérifiant : } \forall A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}),\ \|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|}$.

La série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est absolument convergente, car $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ et que $\sum \dfrac{\|A\|^n}{n!}$ converge (vers $e^{\|A\|}$)..

On définit l'exponentielle de la matrice $A$ par : $\boxed{\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A^n}{n!}}$

*Exemples* : $\exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$, $\quad \exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}$.

*Remarque* : Si $B = P^{-1}AP$, alors $\exp(B) = P^{-1}\exp(A)P$. Par trigonalisation, on en déduit que $\det(\exp(A)) = e^{\operatorname{tr} A}$.

## 4) Exemple : séries entières de matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et $B = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k A^k$ une série convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $B$ est un polynôme en $A$.

En effet, $A$ admet un polynôme annulateur $M$ de degré $r \leq n$.

Par la division euclidienne par $M$, tout polynôme en $A$ appartient à $F = \mathrm{Vect}(I, A, A^2, ..., A^{r-1})$.

Par définition, $B$ est limite de polynômes en $A$, donc appartient à l'adhérence de $F$.

Or, $F$ est fermée puisque $F$ est un sev de dimension finie.

## 5) Exemple : convergence normale d'une série de fonctions continues

On considère $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\sum \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)|$ converge.

Autre dit, on suppose que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

La série de fonctions $\sum f_n$ converge vers une fonction continue $f \in E$ pour la norme $\| \; \|_\infty$ : on dit que $\sum f_n$ converge normalement vers $f$.

## 6) Théorème de point fixe

*Théorème* : Soit $(E, \| \; \|)$ un evn de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application *contractante*, c'est-à-dire :il existe $k \in [0,1[$ tel que $\forall x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$. Alors $f$ admet un *unique point fixe* $c \in E$ et pour tout $x_0 \in E$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $c$.

*Preuve* : comme $f$ est contractante, le point fixe est unique. Soit $x_0 \in E$. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = f(x_n)$. Posons $d = \|x_1 - x_0\|$.

On a $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n d$. Donc la série $\sum \|x_{n+1} - x_n\|$ converge.

Donc $\sum (x_{n+1} - x_n)$ converge, c'est-à-dire $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Posons $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Comme $f$ est continue (car contractante), alors $f(l) = l$. On en déduit donc à la fois l'existence du point fixe (unique) et la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers celui-ci.

*Remarque* : Il suffit en fait qu'il existe une itérée $f^{(q)}$ de $f$ qui soit contractante. En effet, si tel est le cas, $f^{(q)}$ admet un unique point fixe $c$. Or, $f(c)$ est aussi point fixe de $f^{(q)}$ (car $f^{(q)}(f(c)) = f(f^{(q)}(c)) = f(c)$), donc par unicité $f(c) = c$. D'autre part, tout point fixe de $f$ est aussi point fixe de $f^{(q)}$, donc $c$ est l'unique point fixe de $f$.