Espaces vectoriel normés

1) Normes

a) *Définition* : $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur un K-ev E est une application $E \to \mathbb{R}$ $\ x \longmapsto \|x\|$ vérifiant :

i) $\forall\, x \in E,\ \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (vecteur nul).

ii) $\forall\, x \in E,\ \forall \lambda \in K\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$.

iii) Inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Notation : On note parfois $N(x)$ au lieu de $\|x\|$.

Remarque : $\boxed{\text{Pour tout } x \neq 0,\ \dfrac{x}{\|x\|} \text{ appartient à la sphère unité } S}$ (intersection de S et de la demi-droite $\mathbb{R}^+ x$).

La connaissance de S détermine entièrement la norme.

Prop : (seconde inégalité triangulaire) $\forall (x, y) \in E^2,\ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Remarque : Autrement dit, l'application $x \longmapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne de $(E, \|\ \|)$ dans $\mathbb{R}$ (muni de $|\ |$).

b) *Exemples* dans $\mathbb{R}^n$. Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ (norme euclidienne), $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (norme sup), $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Remarque : Plus généralement, pour tout réel $p \geq 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{K}^p$.

Remarques : 1) Dans $E = \mathbb{R}$, la norme usuelle est $N : x \longmapsto |x|$.

2) Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$, la norme euclidienne est $z \longmapsto |z|$.

c) *Exemples* dans le $\mathbb{R}$-ev $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$. On définit des normes sur E par :

$\forall\, f \in E,\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ dt},\ \ \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|,\ \ \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\ dt.$

Remarque : Plus généralement, pour tout réel $p \geq 1$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$ est une norme sur $\mathbb{R}^p$.

d) *Espaces* l^2 et L^2

Espace $l^2(\mathbb{N})$: L'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\sum |u_n|^2$ converge est un sev de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, et $\|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2\right)^{1/2}$ en est une norme.

Espaces $L^2(I, \mathbb{R})$: L'ensemble des fonctions continues $f : I \to \mathbb{R}$ telles que $\int_I f^2 < +\infty$ (c'est-à-dire f de carré intégrable) est un sev de $C^0(I, \mathbb{R})$, et $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, dt}$ en est une norme.

Remarque : Plus généralement, les espaces l^p et L^p sont définis et munis d'une norme pour tout réel $p \geq 1$.

e) *Normes euclidiennes*

Une norme est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire dont elle est la norme associée.

Remarque culturelle : On peut montrer qu'une norme est euclidienne ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.

f) *Normes d'algèbres*

On se place dans le cas où $(E, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, par exemple $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot, \times)$.

Une norme d'algèbre sur E est une norme vérifiant la propriété : $\forall (x, y) \in E,\ \|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|$.

Remarque : Dans ce cas, on a en particulier $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque : On impose aussi souvent la condition $\|1_E\| = 1$. Dans ce cas, $\|x\|\ \|x^{-1}\| \geq 1$ pour tout x inversible.

2) Distance associée à une norme, boules, propriété vraie au voisinage d'un point

a) *Définitions*

- On considère $d : E \times E \to \mathbb{R} \ \ (x, y) \longmapsto \|x - y\|$.

On a : $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

- Soient $x \in E$ et $A \subset E$ non vide. La distance de x à A est $d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}$.

- La boule de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.

Remarque : $B(0, r)$ est l'image de la boule unité $B(0, 1)$ par l'homothétie de centre $\overrightarrow{0}$ et de rapport r.

$B(\overrightarrow{a}, r)$ est l'image de $B(0, r)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{a}$.

A CONNAÎTRE : Représentation des boules unités de $\mathbb{R}^2$ pour $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ et $\| \|_1$.

- On dit que $A \subset E$ est bornée ssi il existe $r \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A$, $\|x\| \leq r$ (c'est-à-dire ssi $A \subset B(0, r)$).

Remarques : 1) Les boules sont des parties bornées. 2) Définition analogue pour une suite bornée.

b) *Voisinage d'un point, propriétés vraies au voisinage d'un point*

On appelle voisinage de a toute partie contenant tous les points assez proches de a, c'est-à-dire contenant une boule de centre a et de rayon $r > 0$.

On dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ est vraie au voisinage de a ssi elle est vraie sur un voisinage de a, c'est-à-dire ssi il existe $r > 0$ tel que $\forall \overrightarrow{x} \in B(a, r)$, $\mathcal{P}(x)$, c'est-à-dire ssi $\mathcal{P}$ est vraie sur une boule de centre a et de rayon $r > 0$.

Remarque : De même, on appelle voisinage de ∞ toute partie contenant les points de norme assez grand.

3) Limite d'une suite de vecteurs

a) *Définition* : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs d'un ev normé $(E, \| \|)$.

On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x ssi $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. Dans ce cas, x est unique et est noté $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Définition équivalente : $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ ssi $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Définition équivalente : $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ ssi pour tout voisinage V de x, on a $x_n \in V$ pour n assez grand.

Prop : (linéarité) Si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ alors $\lim_{n\to+\infty} \lambda x_n + \mu y_n = \lambda x + \mu y$.

Prop : Toute suite convergente est bornée.

b) *Cas particulier important* : On considère $E = \mathbb{K}^p$ muni de la norme $\| \|_\infty$.

Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs, avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_p^{(n)})$.

Alors $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l = (l_1, l_2, ..., l_p)$ ssi pour tout $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $\lim_{n\to+\infty} x_i^{(n)} = l_i$.

c) *Relations de comparaisons*

Définitions : Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs d'un ev normé $(E, \| \|)$.

- $x_n = \mathfrak{o}(a_n)$ ssi pour tout $\varepsilon > 0$, $\|x_n\| \leq \varepsilon \|a_n\|$ pour n assez grand.
- $x_n \sim a_n$ ssi pour tout $x_n - a_n = \mathfrak{o}(a_n)$
- $x_n = O(a_n)$ ssi il existe M tel que $\|x_n\| \leq M \|a_n\|$ pour n assez grand.

Remarque : Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut formuler les définitions avec $\dfrac{x_n}{a_n}$ (lorsque $a_n \neq 0$ pour n assez grand).

4) Normes équivalentes

a) *Définition* : Des normes $\| \|_1$ et $\| \|_2$ sur E sont équivalentes ssi il existe k et $l \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall x \in E,\ k\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq l\|x\|_2$$

autrement dit ssi les quotients $\| \|_1 / \| \|_2$ et $\| \|_2 / \| \|_1$ sont majorées sur $E \setminus \{0\}$.

Important : $\boxed{\text{Deux normes équivalentes définissent la même notion de limite, la même notion de partie bornée}}$.

Pour prouver que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit d'expliciter une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|x_n\|_1}{\|x_n\|_2} = +\infty \text{ (ou bien } \lim_{n\to+\infty} \frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1} = +\infty \text{)}$$

Exemple : Les normes $\| \|_1$,$\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $C^0([a,b],\mathbb{R})$.

On a $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$, $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty$ et $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\,\|f\|_2$ (Cauchy-Schwarz).

On considère $f_n(t) = \left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)^n$. Alors $\|f_n\|_1 = \dfrac{b-a}{n+1}$, $\|f_n\|_2 = \sqrt{\dfrac{b-a}{2n+1}}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty / \|f_n\|_1 = +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty / \|f_n\|_2 = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_2 / \|f_n\|_1 = +\infty$.

Exemple : Sur $C^1([0,1],\mathbb{R})$, $N(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt$ et $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$ sont des normes.

D'autre part, on a $\|f\|_\infty \leq N(f)$, car $|f(x)| \leq \left|f(0) + \int_0^x f'(t)\ dt\right| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|\ dt \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt$.

Mais les normes ne sont pas équivalentes : Avec $f_n(t) = \sin(2\pi n t)$, on a $\|f\|_\infty = 1$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Mais $\int_0^1 |f_n'(t)|\ dt = 2\pi n \int_0^1 |\cos(2\pi n t)|\ dt = 2\pi n \times \frac{2}{\pi} = 4n$, d'où $N(f_n) = 4n$.

b) *Théorème* (admis) : Dans un espace vectoriel normé de dimension finie , toutes les normes sont équivalentes.

Conséquences : Soit E un ev normé de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Alors

i) une suite de vecteurs converge dans E ssi les p suites de coordonnées dans $\mathcal{B}$ convergent vers les coordonnées de la limite.

ii) une suite de vecteurs est bornée ssi les p suites de coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont bornées.

Preuve : La propriété est immédiate pour la norme sup : $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq p}(|\lambda_i|)$, où $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

Exemple : Dans $\mathbb{C}$, $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$ ssi $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$.

Exemple : Dans $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{(p^2)}$, $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$ ssi $\forall (i,j) \in \{1, ..., p\}^2,\ \lim_{n\to+\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$.

5) Limite d'une fonction, applications continues, applications lipschitziennes

a) *Définition* : Soient $(E, \| \|)$ et $(F, \| \|)$ deux espaces vectoriels normés, $f : E \to F$, $a \in E$ et $l \in F$.

On dit que $f(x)$ converge vers l lorsque x tend vers a ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall x \in E,\ \|x - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|\,f(x) - l\| \leq \varepsilon$.

On pose $l = \lim_{x\to a} f(x)$.

Remarque : Définition équivalente en termes de voisinages : $f(x)$ tend vers l ssi x tend vers a ssi pour tout voisinage V de l, il existe W voisinage de a tel que $\forall x \in E$, $(x \in W \Rightarrow f(x) \in V)$.

Limite en l'infini :

$f(x)$ converge vers l lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ ssi $\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|x\| \geq M \Rightarrow \|\,f(x) - l\| \leq \varepsilon$.

b) *Caractérisation séquentielle*

Prop : $l = \lim_{x \to a} f(x)$ ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

Important :

Pour prouver que f diverge en a, il suffit de trouver une suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ divergente, avec $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.

Ou bien trouver $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes, avec $\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} x_n = a = \lim_{n \to +\infty} y_n \\ \lim_{n \to +\infty} (f(x_n)) \neq \lim_{n \to +\infty} (f(y_n)) \end{cases}$

c) *Applications continues*

Définition : On dit que f est continue en a ssi $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. *Caractérisation séquentielle* : f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

d) *Applications lipschitziennes*

Définition : $\boxed{\text{On dit que } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne ssi } \forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\|}$.

Prop : Toute application lipschitzienne est continue.

Exemple : $\boxed{\text{La norme } x \longmapsto \|x\| \text{ est 1-lipschitzienne (seconde inégalité triangulaire)}}$.

e) *Cas des fonctions à valeurs dans* $\mathbb{R}^p$

Prop : Soit $f : E \to \mathbb{R}^p$ $x \longmapsto (f_1(x), ..., f_p(x))$. Alors f est continue ssi les f_j est continue.

Preuve : Résulte de la caractérisation séquentielle et des caractérisations des limites en dimension finie (la convergence d'une suite dans $\mathbb{R}^p$ correspond à la convergence des p suites de coordonnées).

6) Applications linéaires continues

Prop (*caractérisation fondamentale*): Soit $u : E \to F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe $k \geq 0$ tel que $\|u(x)\| \leq k \|x\|$ (*Remarque* : $\|x\|_E$ et $\|u(x)\|_F$).

ii) u est lispchitzienne

iii) u est continue

Preuve : Si $\|u(x)\| \leq k \|x\|$, alors par linéarité $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x-y)\| \leq k \|x - y\|$, d'où ii).

ii) implique iii). Il reste à prouver que iii) implique i). Supposons u continue. Alors u est continue en 0, donc bornée au voisinage de 0 : il existe $r > 0$ tel que $\forall y \in E$, $\|y\| \leq r \Rightarrow \|u(y)\| \leq 1$.

Or, pour tout $x \in E$ non nul, $y = r\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme r, donc $\|u(y)\| \leq 1$, d'où $\|u(x)\| \leq \dfrac{1}{r} \|x\|$.

Exemple : On considère $E = C^0([a,b], \mathbb{C})$ muni de $\| \ \|_\infty$. Soit $\omega \in E$.

L'application $u : E \to \mathbb{C}$ $f \longmapsto \int_a^b f(t)\omega(t)\, dt$ est continue, car $|u(f)| \leq k \|f\|_\infty$, avec $k = \int_a^b |\omega(t)|\ dt$.

Remarque : Pour prouver que u n'est pas continue, il suffit d'expliciter une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\|u(x_n)\|}{\|x_n\|} = +\infty$.

Exemple : On considère $E = C^\infty([0,1], \mathbb{C})$ muni de $\| \ \|_\infty$. On considère $u : f \longmapsto f'$.

Alors u n'est pas continue. En effet, avec $f_n(t) = \sin(n\pi t)$, on a $\lim_{n \to +\infty} \|u(f_n)\| / \|f_n\| = \lim_{n \to +\infty} n\pi = +\infty$.

Remarque : Si $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont deux normes sur E, alors $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont équivalentes ssi Id est bicontinue de $(E, \| \ \|_1)$ dans $(E, \| \ \|_2)$, c'est-à-dire qu'elle est continue (c'est-à-dire lipschitzienne) et que sa réciproque l'est aussi.

7) Points adhérents à une partie d'un evn, parties denses

a) *Point adhérent à une partie*

Définition : Soit $A \subset E$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$.
ii) On peut approcher x arbitrairement près par des éléments de A : $\forall\varepsilon > 0,\ \exists a \in A,\ \|x - a\| \leq \varepsilon$.

Dans ce cas, on dit que x est adhérent à A.

Remarque : L'ensemble des points adhérents à A est appelée adhérence de A, notée $\overline{A}$. Autrement dit, $\overline{A}$ est l'ensemble des limites des suites d'éléments de A. Par extension, on pourrait dire ∞ est adhérent à A ssi A n'est pas majorée.

Remarque : Caractérisation en termes de distance : x est adhérent à A ssi $d(x, A) = 0$.

b) *Partie dense*

Définition : Soit $A \subset E$. On dit que A est dense dans E ssi tout élément de E est adhérent à A, c'est-à-dire ssi on peut approcher tout élément de E arbitrairement près par des éléments de A.

Exemple : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^2$ est dense dans $\mathbb{R}^2$.

c) *Approximation d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escaliers*

On considère l'ev des fonctions continues par morceaux $C^0_m([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.
(*Remarque* : on identifie les fonctions égales à un nombre fini de points près afin d'avoir effectivement une norme).
Toute fonction continue f sur un segment $[a,b]$ peut être approchée arbitrairement près par des fonctions en escaliers. Plus précisement, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ en escaliers telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\sup_{[a,b]}(\psi - \varphi) \leq \varepsilon$.
On a a fortiori $\sup_{[a,b]}(|f - \varphi| \leq \varepsilon$. Ainsi, le sev des fonctions en escaliers est dense dans $C^0_m([a,b],\mathbb{R})$.

d) *Théorème de Stone-Weierstrass* : On considère $C^0([a,b],\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Toute fonction continue f sur un segment $[a,b]$ peut être approchée arbitrairement près par des fonctions polynômes.

Autrement dit, le sev des fonctions polynômes est dense dans $C^0([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. Ainsi, il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers f, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$.

8) Ouverts et fermés d'un ev

a) *Partie fermée* : $F \subset E$ est fermé ssi F est stable par passage à la limite, c'est-à-dire ssi pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in E$, alors $x \in F$. Autrement dit, F est fermé ssi $\overline{F} = F$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $[a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$, étant définis par des inégalités larges, sont fermés.

Remarque : On a $\overline{F} = \{x \mid d(x,F) = 0\}$. Donc $F \subset E$ est fermé ssi $\forall x \in E \setminus F,\ d(x,F) > 0$.

b) *Partie ouverte* : $U \subset E$ est ouvert ssi $\forall x \in U,\ \exists\varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset U$.

Exemple : Montrer que $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ est ouvert.

Exemple : Dans $\mathbb{R}$, l'intervalle $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Remarque : $U \subset E$ est ouvert ssi $\forall x \in U,\ d(x, E \setminus U) > 0$. D'où :

Prop : Une partie est ouverte ssi son complémentaire est fermé (et réciproquement).

Preuve : Soient U et F deux parties complémentaires, c'est-à-dire $F = E \setminus U$.

Alors $d(x, F) > 0$ ssi x n'est pas adhérent à F. Donc $\overline{F} = F$ ssi $\forall x \in U$, $x \notin \overline{F}$, c'est-à-dire $\forall x \in U$, $d(x, E \setminus U) > 0$.

Prop : Une intersection de parties fermées est fermée ; une réunion de parties ouvertes est ouverte.

Une intersection finie d'ouverts est ouverte. En revanche, c'est faux pour une intersection infinie d'ouverts : Dans $\mathbb{R}$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}] - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$, et plus généralement, l'intersection des boules ouvertes $B(0, \frac{1}{n})$ est le singleton $\{0\}$.

c) *Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue*

Prop : Soient $(E, \| \|)$ et $(E', \| \|)$ deux evn, et $f : E \to E'$ une application continue. L'image réciproque d'un ouvert de E' (resp. d'un fermé) par une application continue est un ouvert de E (resp. un fermé).

Preuve : Soit F' un fermé de E'. Posons $F = f^{-1}(F')$.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F convergeant vers $x \in E$. Alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$.

Comme $f(x_n) \in F'$ et F' fermé, alors $f(x) \not\in F'$, donc $x \in F$. On en conclut que f est fermé.

Le cas des ouverts se déduit du cas précédent, car $f^{-1}(E' \setminus F') = E \setminus F$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.

Alors $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ et $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \geq 0\}$ sont fermés, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\}$ est ouvert.

Exemple : Montrons que $GL_p(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Considérons $\det : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad A \longmapsto \det A$.

Le déterminant étant une fonction polynomiale des coefficients, il résulte (de la caractérisation séquentielle) que det est continue. Donc $GL_p(\mathbb{R}) = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$ est ouvert, car $\mathbb{R}^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarque : De facon analogue, $SL_p(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

En effet, si $\lim_{n\to+\infty} A_n = A$, alors $\lim_{n\to+\infty} \det A_n = \det A$, d'où en particulier, si $\det A_n = 1$, alors $\det A = 1$.

Exemple : L'ensemble des zéros d'une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sur le fermé $[a, b]$ est un fermé.

En effet, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ et $f(x_n) = 0$, alors $x \in [a, b]$ et par continuité $f(x) = 0$.

d) *Cas des sous-espaces vectoriels de dimension finie*

Prop : Les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont des parties fermées.

Preuve : On commence par le cas où E est de dimension finie : On peut prendre $E = K^n$, et tout sev de E est défini par un système d'équations $AX = 0$, et $F = \operatorname{Ker} A$ est fermé (passage à la limite des équations).

Dans le cas général, si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ avec $x_n \in F$ sev de E de dimension finie, on se place dans $E' = F + Kx$ sev de dimension finie muni de la norme induite, on a par le cas précédent $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ dans E', donc $x \in F$.

Remarque : Faux pour les sev de dimension infinie. Par exemple, certains sev stricts sont denses (cf théorème de Stone-Weierstrass), donc a fortiori non fermés. En revanche, les seuls sev de E qui sont ouverts sont $\emptyset$ et E.

e) *Connexité* : $\boxed{\text{Les seules parties de } E \text{ à la fois ouvertes et fermées sont } \emptyset \text{ et } E}$.

Preuve : Sinon, il existe A ouvert, $x \in A$ et $y \notin A$.

Posons $z(\lambda) = x + \lambda(y - x)$ et $\mu = \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid z(\lambda) \in A\}$. On vérifie que $z(\mu) \in A$. Donc $\mu < 1$.

Comme A est ouvert, on a $z(\mu + \varepsilon) \in A$, avec $\varepsilon > 0$ assez petit. D'où une contradiction.