Espaces vectoriel normés de dimension finie

1) Equivalence des normes en dimension finie.

Exemple : Considérons $E = \mathbb{R}^p$

Les normes $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq p}(|x_i|)$, $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ sont équivalentes. Et on a :

Théorème (admis) : $\boxed{\text{Dans un espace vectoriel normé de dimension finie , toutes les normes sont équivalentes}}$.

Conséquences fondamentales : Soit E un ev normé de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Alors

i) $\boxed{\text{une suite de vecteurs converge ssi les } p \text{ suites de coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ convergent}}$.

ii) une suite de vecteurs est bornée ssi les p suites de coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont bornées.

Preuve : La propriété est immédiate pour la norme sup : $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq p}(|\lambda_i|)$, où $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$.

Exemple : Dans $\mathbb{C}$, $\lim_{n \to +\infty} z_n = z$ ssi $\lim_{n \to +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \to +\infty} y_n = y$.

Exemple : Dans $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{(p^2)}$, $\lim_{n \to +\infty} A_n = A$ ssi $\forall (i,j) \in \{1, ..., p\}^2$, $\lim_{n \to +\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij}$.

2) Parties compactes (= fermées et bornées) en dimension finie

a) *Définition* : en dimension finie, une partie compacte est une partie fermée et bornée.

Exemple : Les segments $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ sont des compacts de $\mathbb{R}$.

Les segments sont d'ailleurs les seules parties de $\mathbb{R}$ à la fois compactes et convexes.

Propriété des bornes atteintes (admise) : Soit K une partie compacte d'un evn E de dimension finie.

$\boxed{\text{Toute fonction continue } f : K \to \mathbb{R} \text{ sur un compact non vide est bornée et atteint ses bornes}}$.

Remarque culturelle **:** Si $f : K \to F$ est continue et à valeurs dans un evn F de dim finie, $f(K)$ est compacte.

Corollaire : Soient K un compact non vide d'un evn E (de dimension finie) et $x \in K$.

Alors la distance de x à K est atteinte : il existe $a \in K$ tel que $\|x - a\| = d(x, K)$.

Preuve : L'application $f : K \to \mathbb{R}$ $y \longmapsto \|x - y\|$ est 1-lipschitzienne donc continue, et atteint ses bornes.

b) *Cas des fonctions tendant vers* 0 *en l'infini et des fonctionstendant vers* $+\infty$ *en l'infini.*

Prop : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur un evn E de dimension finie (souvent $E = \mathbb{R}^n$).

On suppose que $|f(x)|$ tend vers 0 lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Alors f est bornée.

Preuve : Pour $\|x\| \geq r$ assez grand, $|f(x)| \leq 1$. Puis f est bornée sur le compact $B(0, r)$. Donc f est bornée.

Prop : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur un evn E de dimension finie (souvent $E = \mathbb{R}^n$).

On suppose que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Alors $\inf f$ existe et est atteint : il existe $c \in E$ tel que $\inf_{x \in E} f(x) = f(c)$.

Preuve : Posons $k = f(0)$. Il existe $r \geq 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|x\| \geq r \Rightarrow f(x) \geq k$.

On en déduit que $\inf\{f(x), x \in E\} = \inf\{f(x), x \in B\}$, où B est la boule fermée de centre 0 et de rayon r.

En effet, $f(0)$ appartient à $\{f(x), x \in B\}$, et pour tout x n'appartenant pas à B, on a $f(x) \geq k$.

Comme f est continue sur le compact B, alors il existe $c \in E$ tel que $\inf\{f(x), x \in B\} = f(c)$.

D'où $\inf\{f(x), x \in E\} = f(c)$.

c) *Distance d'un point à un sev de dimension finie.*

Prop : Soit F un sev de dimension finie dans un evn E, et soit $x \in E$.

Alors la distance de x à K est atteinte : il existe $a \in K$ tel que $\|x - a\| = d(x, F)$.

Remarque : La propriété ne résulte pas du corollaire énoncé au a), car F n'est pas borné (en revanche, F est fermé).

Preuve : L'application $f : F \to \mathbb{R} \;\; y \longmapsto \|x-y\|$ est continue.
De plus, $f(y) \geq \|y\| - \|x\|$, donc $f(y)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|y\|$ tend vers $+\infty$. Par b), f atteint sa borne inférieure.

Corollaire : Soit f une application continue sur $[a,b]$. On munit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ d'une norme arbitraire.
Il existe un polynôme P minimisant $\|f-P\|$ lorsque P décrit le sev $\mathbb{R}_n[X]$ des fonctions polynômes de degré $\leq n$.

Remarques :
Pour la norme euclidienne $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt}$, P est unique et est le projeté orthogonal de f sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour la norme $\|f\|_\infty$, on ne peut pas expliciter P dans le cas général (bien qu'il soit unique).
Pour certaines normes, P n'est pas unique.

3) Continuité des applications linéaires en dimension finie

a) *Continuité des applications linéaires en dimension finie.*

Remarque : En dimension finie, les notions de continuité et de lipschitzcité ne dépendent pas du choix de la norme (mais les rapports de lipschitzcité sont généralement modifiés lorsqu'on change de norme).

Prop : $\boxed{\text{En dimension finie, toute application linéaire } u : E \to F \text{ est continue } (= \text{lipschitzienne})}$.

Preuve : On choisit une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E. On munit E de la norme du sup des coordonnées dans $\mathcal{B}$.
Alors $\|u(x)\| = \|u(\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i)\| = \|\sum_{i=1}^p \lambda_i u(e_i)\| \leq \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \, \|u(e_i)\| \leq k \sup_{1\leq i\leq p} |\lambda_i|$, où $k = \sum_{i=1}^p \|u(e_i)\|$.

Variante : Par le choix de bases, toute application linéaire u s'identifie à $u : K^p \to K^q \; X \longmapsto AX$, où $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$.

On conclut en utilisant la caractérisation séquentielle : si $\lim_{n\to+\infty} X_n = X$, alors $\lim_{n\to+\infty} AX_n = AX$, qui résulte immédiatement de l'expression des coordonnées de $Y = AX$, à savoir $y_i = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j$.

b) *Continuité des applications bilinéaires* (et n-linéaires) *en dimension finie.*

Prop : soit $B : E \times F \to G$ une application n-linéaire.
Alors il existe $k \geq 0$ tel que $\forall (x,y) \in E \times F$, $\|B(x,y)\| \leq k \|x\| \, \|y\|$, et B est continue.

Preuve : On choisit des bases $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ de F.
Alors $\|B(x,y\| = \left\|\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \lambda_i \mu_j B(e_i, e'_j)\right\| \leq k \sup_{1\leq i\leq p} |\lambda_i| \sup_{1\leq j\leq q} |\mu_j|$, où $k = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \left\|B(e_i, e'_j)\right\|$.

Remarque : Plus généralement, si $f : E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \to F$ est une application n-linéaire, il existe $k \geq 0$ tel que $\forall (x_1, ..., x_n) \in$, $\|f(x_1, ..., x_n)\| \leq k \|x_1\| \, \|x_2\| ... \|x_n\|$, et f est continue.

4) Normes sur une algèbre de dimension finie, et existence d'une norme d'algèbre

a) Une norme d'algèbre sur une $\mathbb{R}$-algèbre E est une norme N sur E vérifiant $N(xy) \leq N(x)N(y)$.

b) On suppose que $(E, +, \cdot, \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dim finie muni d'une norme $\| \; \|$, par exemple $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Comme l'application $E \times E \to E \; (x,y) \longmapsto xy$ est bilinéaire, il existe $k > 0$ tel que $\forall (x,y) \in E^2$, $\|xy\| \leq k \|x\| \, \|y\|$.

La norme N définie par $N(x) = k \|x\|$ est une norme d'algèbre, puisqu'on a : $N(xy) \leq N(x)N(y)$.

5) Exemples de normes sur $\mathbb{R}_n[X]$

a) Pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, on peut considérer $\|P\|_\infty = \sup_{0\leq k\leq n} |a_k|$, $\|P\|_1 = \sum_{k=1}^n |a_k|$ et $\|P\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$.

b) $N_\infty(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$ est une norme (en fait sur $\mathbb{R}[X]$, induite par la norme sup sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$).

6) Exemples de normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

a) Pour $M = (a_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$, on peut considérer $\|M\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n} |a_{ij}|$.
Mais il ne s'agit pas d'une norme d'algèbre : $\|MN\|_\infty \leq n \|M\|_\infty \|N\|_\infty$, avec des cas d'égalité.

b) En revanche, $\|M\| = \sup_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ est une norme d'algèbre.

7) Complément : Preuve de l'équivalence des normes en dimension finie

Soit (E, N) un evn de dimension finie.
On considère $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, ..., |x_p|)$, où $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in E$.
Il s'agit de prouver que N et $\| \ \|_\infty$ sont équivalentes.
On a $\forall x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in E$, $N(x) \leq \sum_{i=1}^p |x_i| N(e_i) \leq k \ \|x\|_\infty$, où $k = \sum_{i=1}^p N(e_i)$.
Donc $\forall (x, y) \in E$, $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq k \ \|x - y\|_\infty$.
Ainsi, $N : x \longmapsto N(x)$ est lipschitzienne donc continue de $(E, \|x\|_\infty)$ dans $\mathbb{R}$.
La sphère unité S de $(E, \|x\|_\infty)$ est compacte, donc N atteint ses bornes sur S.
Il existe donc $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telle que $\forall y \in S$, $\alpha \leq N(y) \leq \beta$.
Donc $\forall x \in E$, $\alpha \|x\|_\infty \leq N(x) \leq \beta \|x\|_\infty$ en prenant $y = \dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$ si x n'est pas nul.