Suites définies par une récurrence linéaire à coefficients constants

On considère ci-dessous des récurrences d'ordre ≤ 3, mais le principe est valable pour tout ordre.

1) Cas homogène

a) Suites définies par une récurrence linéaire à coefficients constants

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$(H) : \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$$

Posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$. Comme $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$, alors $\boxed{X_{n+1} = AX_n}$.

Ainsi, une récurrence linéaire d'ordre 3 dans $\mathbb{C}$ se ramène à une récurrence d'ordre 1 dans $\mathbb{C}^3$.

En particulier, on a l'isomorphisme $S_H \to \mathbb{C}^3 \ \ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_0, u_1, u_2)$. Donc $\boxed{\dim S_H = 3}$.

On obtient $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(x) = x^3 - ax^2 - bx - c$, appelée équation caractéristique de (E).

Premier cas : Supposons que χ_A admet trois racines distinctes λ, μ et ν.

Alors A est diagonalisable, et il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$, où $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

On a $A^n = PB^nP^{-1}$ et $X_n = A^n X_0$. Ici, $B^n = \mathrm{Diag}(\lambda^n, \mu^n, \nu^n)$.

Donc les coefficients de A^n et de X_n sont donc des combinaisons linéaires des coefficients de B^n.

On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\nu^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Or, $\dim S_H = 3$. Donc nécessairement $S_H = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\nu^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Deuxième cas : Supposons que les racines de χ_A soient λ, λ et μ.

On vérifie aisément (à l'aide de $\mathrm{rg}(A - \lambda I)$ que les sev propres d'une matrice compagnon sont de dim 1.

Alors A est semblable à $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$. On a alors $B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{pmatrix}$.

On a $X_n = (PB^nP^{-1})X_0$. On en déduit $F = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Remarque : Si $\lambda \neq 0$, on a donc $F = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (\mu^n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Troisième cas : Supposons que λ soit racine triple de χ_A.

Alors (on admet que) A est semblable à $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Et $B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

On en déduit $F = \mathrm{Vect}((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n\lambda^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}, (n^2\lambda^{n-2})_{n\in\mathbb{N}})$.

b) Solutions des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$(H) : \forall t \in \mathbb{R},\, y^{(3)}(t) = ay''(t) + by'(t) + cy(t).$$

Posons $X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$. L'équation s'écrit $\boxed{X'(t) = AX(t)}$.

Ainsi, une équation différentielle d'ordre 3 dans $\mathbb{C}$ se ramène à un système différentiel d'ordre 1 dans $\mathbb{C}^3$. L'ensemble S_H des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant (E) est un sev de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ de dimension 3.

En effet, par Cauchy-lipschitz, l'application $S_H \to \mathbb{C}^3 \quad y \to (y(0), y'(0), y''(0))$ est un isomorphisme de F sur $\mathbb{C}^3$.

On peut explicter les solutions avec les exponentielles de matrices : $\boxed{X(t) = \exp(tA)X(0)}$.

En effet, en considérant les séries de fonction associées aux coefficients de $\sum \dfrac{A^k}{k!} t^k$, on a $\frac{d}{dt}(\exp(tA)) = A\exp(tA)$, donc $X(t) = \exp(tA)Z$ vérifie bien $X(0) = Z$ et $X'(t) = AX(t)$.

On a $A = PBP^{-1}$, avec $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, où λ, μ et ν distincts.

On obtient $\exp(tA) = P\exp(tB)P^{-1}$, avec $\exp(tB) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\nu t} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$.

Donc $S_H = \mathrm{Vect}(e^{\lambda t}, e^{\mu t}, e^{\nu t})$, $\mathrm{Vect}(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, e^{\mu t})$ ou $\mathrm{Vect}(e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t})$ selon les cas.

2) Méthode de variation de la constante en dimension 1

Considérons $\lambda \in \mathbb{C}^*$, une suite complexe $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\boxed{(E) : x_{n+1} = \lambda x_n + b_n}$.

Les solutions de l'équation homogène (H) sont les suites géométriques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (K\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On effectue le changement de variable $\boxed{x_n = y_n\ \lambda^n}$. Alors (E) s'écrit

$$y_{n+1} - y_n = \lambda^{-n-1}b_n$$

Donc les solutions de (E) sont les $x_n = K\lambda^n + \lambda^n \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^{-j-1}b_j$, où K est une constante arbitraire.

Remarque : La méthode s'applique de façon plus générale aux suites récurrentes à coefficients non nécessairement constants : $(E) : x_{n+1} = a_n x_n + b_n$.

Les solutions de (H) sont les $x_n = KA_n$, avec $A_n = \prod_{k=0}^{n-1} a_k$, et on pose $x_n = y_n \times A_n$.

3) Cas d'un second membre de la forme $Q(n)\mu^n$

a) On considère

$$(E) : x_{n+1} - \lambda x_n = Q(n)\ \mu^n \quad \text{, où } Q \text{ est un polynôme à coefficients complexes}$$

Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x_n = P(n)\mu^n$, où $\begin{cases} \deg P = \deg Q \text{ si } \mu \neq \lambda \\ \deg P = 1 + \deg Q \text{ si } \mu = \lambda \end{cases}$

En effet, cherchons une solution sous la forme $x_n = P(n)\mu^n$.

On veut donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu P(n+1) - \lambda P(n) = Q(n)$.

Comme $\mathbb{N}$ est infini, une CNS est donc $\mu P(X+1) - \lambda P(X) = Q(X)$.

On considère l'endomorphisme $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \quad P(X) \longmapsto \mu P(X+1) - \lambda P(X)$.

Lorsque $\mu \neq \lambda$, il conserve le degré (donc est bijectif).

Lorsque $\mu = \lambda$, on a $\deg u(P) = \deg P - 1$ (pour P non constant), et on conclut par le th du rang.

b) Cas particulier classique : On considère $(E) : x_{n+1} = \lambda x_n + b$, avec $b \in \mathbb{C}$.

On cherche une solution particulière constante.

Lorsque $\lambda \neq 1$, une solution particulière est $x_n = c = \dfrac{b}{1-\lambda,}$ et (E) s'écrit $(x_{n+1} - c) = \lambda(x_n - c)$.

Lorsque $\lambda = 1$, les solutions de (E) sont les $x_n = a + bn$.

Remarque : $z \longmapsto az + b$ est une homothétie de centre c si $\lambda \neq 1$, et une translation si $\lambda = 1$.

c) Les propriétés sont analogues pour la dimension ≥ 2 : on se ramène au cas de la dim 1 par factorisation.

Par exemple, $u : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit $u = \delta^2 + a\delta + b\,\mathrm{Id} = (\delta - \lambda\,\mathrm{Id}) \circ (\delta - \mu\,\mathrm{Id})$, avec

$$\delta : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

4) Epilogue

Pour les équations différentielles, les fonctions $t \longmapsto K\exp(\lambda t)$ sont les vecteurs propres de $D : y \longmapsto y'$.

Pour les suites, les suites géométriques $(K\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les vecteurs propres de $\delta : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : En fait, dans le cas des suites, une variante consiste à prendre pour δ non pas l'opérateur de décalage mais l'opération de dérivation discrète : $\delta : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On pourrait alors considérer les équations différentielles comme la version continue du cas discret Ainsi, le schéma d'Euler de $X' = AX$ s'écrit $X_{k+1} - X_k = hA$, où h est le pas de temps.

Il correspond donc à $X_{n+1} = (I_n + hA)\ X_n$.

5) Annexe : exercices

a) **Enoncé** : Montrer qu'il existe un polynôme P tel que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (P(n)2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = n2^n$$

Remarque : On note que $z^2 - z - 2$ admet 2 et -1 comme racines.
On peut donc s'attendre à obtenir une solution de degré $\deg P = 2$.

Solution : $(P(n)2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $4P(n+2) - 2P(n+1) - 2P(n) = n$.
On considère $u : \mathbb{R}_2[X] \longmapsto \mathbb{R}_1[X] \quad P(X) \longmapsto 4P(X+2) - 2P(X+1) - 2P(X)$.
On a $u(1) = 0$, $u(X) = 6$ et $u(X^2) = 12X + 14$.
Donc $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$, et il existe $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $u(P) = X$, ce qui permet de conclure.

b) **Enoncé** : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n = nx_{n-1} - 1$. Déterminer une CNS sur x_0 pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Solution : On applique la méthode de variation de la constante.
Les solutions de l'équation homogène sont les $x_n = K(n!)$. On pose donc $x_n = y_n \times n!$
L'équation s'écrit $y_n = y_{n-1} - \dfrac{1}{n!}$, donc $y_n = y_0 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$.
Donc $x_n = n! \times \left(x_0 - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}\right)$. On a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} = e - 1$,
Donc une condition nécessaire pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge est $x_0 = e - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}$.
Réciproquement, supposons $x_0 = e - 1$. Alors $x_n == n! \times \left(e - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\right) = n! \times \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}\right)$.
Or, par l'inégalité de Taylor-Lagrange, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}\right| = \left|\exp(1) - \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k!}\right| \leq \dfrac{e}{(n+1)!}$.
Donc $|x_n| \leq \dfrac{e}{n+1}$, et on a bien $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

c) **Enoncé** : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - \lambda x_n) = 0$.

(i) On suppose $|\lambda| < 1$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(ii) On suppose $|\lambda| > 1$. Montrer qu'il existe une unique valeur de x_0 pour laquelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(iii) Que dire de (i) et (ii) si $\lim_{n\to+\infty} (x_{n+1} - \lambda x_n) = L$, avec $L \in \mathbb{C}$?

Solution : Posons $b_n = x_{n+1} - \lambda x_n$. On a $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$.
On résout $x_{n+1} - \lambda x_n = b_n$ par la méthode de variation de la constante. On obtient : $x_n = \lambda^n\ x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} b_k$.

(i) On suppose $|\lambda| < 1$. En appliquant une preuve de type Cesàro (pincement avec ε), on montre que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k-1} b_k = 0$$

Il faut couper la somme en deux : les premiers termes sont petits du fait de λ, les autres sont petits du fait de b_k avec k assez grand.

(ii) On suppose $|\lambda| > 1$. On a $x_n = \lambda^n\ (x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{-k-1} b_k)$.
Comme la série géométrique $\sum \left|\lambda^{-n}\right|$ converge et que $b_n = O(1)$, alors $\sum \lambda^{-n-1} b_n$ converge.
On pose $L = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{-k-1} b_k$. Pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il faut que $x_0 + L = 0$, c'est-à-dire $x_0 = -L$.

Réciproquement, supposons $x_0 = -L$.
Alors $x_n = \lambda^n\ \sum_{k=n}^{+\infty} \lambda^{-k-1} b_k$. On obtient $|x_n| \leq \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left|\lambda^{-j}\right|\right) \sup_{k\geq n} |b_k| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - 1} \sup_{k\geq n} |b_k| \to 0$.

Par pincement, $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

(iii) La suite constante $(c)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation avec $c(1-\lambda) = L$, c'est-à-dire $c = \dfrac{L}{1-\lambda}$.
On se ramène aux cas précédents en considétant la suite $(x_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$.