Espaces euclidiens

1) Espaces préhilbertiens réels

a) *Un espace préhilbertien réel* est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire une forme bilinéaire symétrique définie positive $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$. On pose $\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$.

Pour tout $x \neq \overrightarrow{0}$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ appartient à la sphère unité S (et $\|x\|$ est l'unique réel tel que $\dfrac{x}{\lambda} \in S$).

Exemples : $\mathbb{R}^n$ muni de $\boxed{(X \mid Y) = X^T Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k}$, $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de $(f \mid g) = \int_a^b f(t) g(t)\, dt$.

b) *Norme d'une somme*

$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle}$

Remarque : Lien avec Al-Kashi : $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\,\|y\| \cos\theta$ où θ angle non orienté (x, y).

Remarque : Cas particulier dans $\mathbb{C}$ (identifié au plan euclidien $\mathbb{R}^2$) : $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{z} z')$.

Identité du parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Remarque culturelle : Une norme est euclidienne ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.

c) *Identités de polarisation* : $\boxed{\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}$.

Ainsi, la connaissance de $\|\ \|$ (et donc de la sphère unité) détermine entièrement le produit scalaire.

d) *Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire*

Prop : $\boxed{\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|\,\|y\| \text{, avec égalité ssi } x \text{ et } y \text{ sont colinéaires}}$.

Preuve : Le polynôme $P(t) = \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x, y \rangle + t^2\|y\|^2$ est à valeurs positives, donc $\Delta \leq 0$.

Pour y non nul, il y a égalité ssi $\exists\, t \in \mathbb{R}$, $x + ty = 0$, c'est-à-dire ssi x et y colinéaires.

Prop : $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, avec égalité ssi $\langle x, y \rangle = \|x\|\,\|y\|$, c'est-à-dire ssi x et y colinéaires de même sens.

2) Orthogonalité

a) *Vecteurs orthogonaux*

Théorème de Pythagore : $\langle x, y \rangle = 0$ ssi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

$\boxed{\text{Si } x_1, x_2, ..., x_n \text{ sont deux à deux orthogonaux, alors } \|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2}$.

Toute famille orthonormée est libre (de même pour une famille orthogonale de vecteurs non nuls).

b) *Orthogonal d'un sev* : On définit $F^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in E,\ \langle x, y \rangle = 0\}$.

Remarque : On a toujours $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, mais en dimension quelconque, la somme n'est pas toujours égale à E.

Par exemple, si F est le sev des polynômes dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de $\|\ \|_2$, alors $F^\perp = \{0\}$.

Deux sev F et G sont orthogonaux ssi $\forall (x, y) \in F \times G$, $x + ty = 0$, c'est-à-dire ssi $F \subset G^\perp$ (ou $G \subset F^\perp$).

Important : Le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

Donc le seul vecteur orthogonal à tout vecteur est le vecteur nul, c'est-à-dire $E^\perp = \{0\}$.

Conséquence : $\boxed{\text{Pour prouver que } x = y \text{, il suffit de prouver que } \forall a \in E,\ \langle x, a \rangle = \langle y, a \rangle}$.

c) *Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie*

Prop : Soit F un sev de dimension finie. On considère $\boxed{(e_1, ..., e_n) \text{ une base orthonormée de } F}$.

Alors $z = x - \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle\ e_i$ est orthogonal à tous les e_j, donc appartient à $F^\perp$.

Corollaire : $\boxed{\text{Pour tout sev } F \text{ un sev de dimension finie, on a } F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E}$.

$\boxed{\text{Le projeté orthogonal de } x \text{ sur } F \text{ est } y = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle\ e_i}$.

En effet, pour tout $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, on a $\langle e_i, x - y\rangle = 0$, c'est-à-dire $x - y \in \text{Vect}(e_1, ..., e_n)^\perp = F^\perp$.

Inégalité de Bessel : $\sum_{i=1}^n \langle e_i, x\rangle^2 = \|y\|^2 \leq \|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

$\boxed{\text{La distance de } x \text{ à } F \text{ est atteinte en } y : d(x,F)^2 = \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2}$.

3) Espaces euclidiens

Un espace euclidien est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

a) *Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien*

$\boxed{\text{Toute forme linéaire s'écrit de façon unique } \varphi_a : E \to \mathbb{R} \ \ x \longmapsto \langle a, x\rangle, \text{ avec } a \in E}$.

Remarque : Si $a \neq 0$, $a^\perp$ est un hyperplan, supplémentaire orthogonal de $D = \mathbb{R}a$.

Remarque : En dimension infinie, les formes linéaires ne sont pas nécessairement de la forme $x \longmapsto (a \mid x)$.
Par exemple, $\varphi : f \longmapsto f(0)$ dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_2$ n'est pas de la forme $f \longmapsto \int_a^b f(t)\omega(t)\ dt$.

b) *Bases orthonormées*

Prop : Tout espace euclidien admet une base orthonormée (preuve par récurrence appliquée à $e^\perp$, avec $e \neq 0$).

Base orthonormée adaptée à une somme directe orthogonale $F \oplus F^\perp = E$.

Théorème de la base orthonormée incomplète : toute famille orthonormée $(e_1, ..., e_p)$ peut être complétée en une base orthonormée de E : il suffit de la compléter par une base de $F^\perp$, où $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_p)$.

c) *Expression des coordonnées d'un vecteur et du produit scalaire dans une base orthonormée*

$\boxed{\text{Si } (e_1, ..., e_n) \text{ est une base orthonormée de } E, \text{ alors } x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x\rangle \ e_i}$.

$\boxed{\text{Si } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \text{ et si } y = \sum_{i=1}^n y_i e_i, \text{ alors } \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \text{ et } \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}}$.

Autrement dit, le produit scalaire de vecteurs correspond au produit scalaire canonique de leurs coordonnées dans une base orthonormée. Le choix d'une BON permet d'identifier E avec $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Remarque : Le choix d'une BON définit la structure euclidienne. Autrement dit, on peut définir une structure euclidienne par le choix d'une base orthonormée. On a alors $\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

d) *Projections orthogonales*

$F^\perp$ est le seul supplémentaire de F orthogonal à F (appelé le supplémentaire orthogonal de F), et $(F^\perp)^\perp = F$.

Def : La projection orthogonale p sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Si $F = \text{Vect}(e_1, ..., e_p)$, $p(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x\rangle \ e_i$.

Si $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, ..., e_n)$, $p(x) = x - \sum_{i=1}^p \langle e_i, x\rangle \ e_i$.

Remarque : Les projections orthogonales sont les projections qui diminuent la norme : $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Cas particuliers importants : Le projeté de x sur la droite $D = \mathbb{R}a$ est $p(x) = \dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a$.

Le projeté de x sur l'hyperplan $H = a^\perp$ est $p(x) = x - \dfrac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle} a$.

4) Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Lemme fondamental : Soit F un sev et $a \in E \setminus F$.
Alors le projeté b de a sur $F^\perp$ vérifie $a - b \in F$ et $b \in F^\perp$. On a aussi $\langle a, b\rangle = \|b\|^2 > 0$.

Prop : Soient $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une base de E. Pour $0 \leq k \leq n$, on pose $F_k = \text{Vect}(a_1, a_2, ..., a_k)$. Ainsi, $F_0 = \{0\}$.
On note $\boxed{b_k \text{ le projeté orthogonal de } a_k \text{ sur } (F_{k-1})^\perp}$. Et on pose $e_k = \dfrac{b_k}{\|b_k\|}$.
Alors $(b_1, b_2, ..., b_n)$ est une BON de E.

On a $\forall k \in \{1,2,...n\}$, $\text{Vect}(a_1,a_2,...,a_k) = \text{Vect}(e_1,e_2,...,e_k)$, et $\langle a_k, e_k\rangle > 0$.

Expression des e_k : On a $\boxed{b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_j, a_k\rangle \ e_j \text{ et } e_k = \dfrac{b_k}{\|b_k\|}}$.

5) Exemple : Produit scalaire (canonique) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{(n^2)}$ est $(A \mid B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} = \text{tr}(A^T B)$.

En particulier, les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont donc les $M \longmapsto \text{tr}(AM)$.

Les sev $S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques et antisymétriques sont alors supplémentaires orthogonaux :
Par dimension, il suffit de prouver qu'ils sont orthogonaux. Or, $\text{tr}(SA) = \text{tr}(S^T A) = \text{tr}(A^T S) = -\text{tr}(SA)$.

Automorphismes orthogonaux dans un espace euclidien et matrices orthogonales

1) Automorphismes orthogonaux

a) *Définition et caractérisations*

Prop et def : Soient E euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dit que u est une transformation orthogonale ssi u vérifie les assertions suivantes qui sont équivalentes :

(i) u conserve la norme : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

(ii) u conserve le produit scalaire : $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ \ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle}$.

(iii) L'image par u de toute base orthonormée de E est une base orthonormée.

(iv) Il existe une base orthonormée dont l'image par u est une base orthonormée.

b) *Groupe orthogonal*

L'ensemble des transformations orthogonales est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, appelé groupe orthogonal, noté $O(E)$.
En particulier, $\text{Id} \in O(E)$, la composée de deux transformations orthogonales est une transformation orthogonale et la réciproque d'une transformation orthogonale est une transformation orthogonale.

On note $O^+(E) = \{u \in O(E) \mid \det u > 0\}$ le sous-groupe des rotations. On a $O^+(E) = O(E) \cap SL(E) = SO(E)$.

c) *Symétries orthogonales*

Def : La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie s par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

Les symétries orthogonales sont des transformations orthogonales.

Remarque : Les symétries orthogonales sont les seules symétries qui sont des transformations orthogonales.

Attention : Les projections orthogonales n'appartiennent pas à $O(E)$ (sauf Id).

d) *Réflexions*

Def : Une réflexion est une symétrie orthogonale s par rapport à un hyperplan H.

Si $H = a^\perp$, on a $\boxed{\forall x \in E,\ \ s(x) = x - 2\dfrac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle} a}$.

Prop : Soient a et b non nuls tels que $\|a\| = \|b\|$. Alors il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$.
De plus, s est la réflexion par rapport à $H = (b-a)^\perp$.

e) *Image de l'orthogonal par une transformation orthogonale*

Prop : Soient $u \in O(E)$ et F sev de E. Alors $u(F^\perp) = u(F)^\perp$.

Preuve : Pour $(x,y) \in F \times F^\perp$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle = 0$, d'où $u(F^\perp) \subseteq u(F)^\perp$, et on conclut par dimension.

Corollaire : Si F est stable par $u \in O(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u.

2) Matrices orthogonales

a) *Représentation matricielle du produit scalaire canonique dans* $\mathbb{R}^n$

Si $X = (x_1, ..., x_n)$ et $Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors $(X \mid Y) = \sum_{i=1}^n x_i\, y_i = X^T Y$.

b) *Matrice de Gram*

Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A_1, ..., A_n$ les colonnes de A, et $B_1, ..., B_n$ les colonnes de B. Alors

$$\boxed{A^T B = ((A_i \mid B_j))_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}}$$

Le coefficient d'indice (i, j) de ${}^t AB$ est le psc des vecteurs A_i et B_j.

c) *Matrice orthogonale*

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale ssi A vérifie les assertions suivantes qui sont équivalentes :

(i) A est inversible et $A^{-1} = A^T$, (i') $A^T A = I_n$, (i") $AA^T = I_n$.

(ii) Les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ muni du psc.

(iii) L'endomorphisme associé à A est une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^n$ muni du psc.

Remarque : On a nécessairement $\det A = \pm 1$, mais ce n'est pas une CNS !

d) *Groupes* $O_n(\mathbb{R})$ et $O_n^+(\mathbb{R}) = SO_n(\mathbb{R})$

L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, appelé groupe orthogonal, noté $O_n(\mathbb{R})$.
En particulier, I_n et $-I_n \in O_n(\mathbb{R})$.

e) *Caractérisation matricielle des bases orthonormées et des transformations orthogonales*

Prop (IMPORTANT) : Soient E euclidien et $\mathcal{B}$ une base *orthonormée* de E.

(i) Une famille $(x_1, ..., x_n)$ est une base orthonormée de E ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est une matrice orthogonale.

(ii) $\boxed{u \in \mathcal{L}(E) \text{ est une transformation orthogonale de } E \text{ ssi la matrice } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u \text{ est orthogonale}}$.

Corollaire : La matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale.

Prop (IMPORTANT) : Soient E euclidien orienté et $\mathcal{B}$ une base *orthonormée directe* de E.

(i) Une famille $(x_1, ..., x_n)$ est une base orthonormée directe ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est une matrice de rotation.

(ii) Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une rotation de E ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est une matrice de rotation.

Corollaire : La matrice de passage entre deux bases orthonormées directes est une matrice de rotation.

3) (★) Décomposition d'Iwasawa (traduction matricielle de Gram-Schmidt) (HP)

Prop : Toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit $A = UT$, où $U \in O_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure.

Preuve : Considérons $(A_1, A_2, ..., A_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ formée des colonnes de A. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient une base orthornormée $(U_1, U_2, ..., U_n)$.
On a $A_j \in \mathrm{Vect}(U_1, ..., U_j)$, donc A_j est de la forme $A_j = \sum_{i=1}^j t_{ij} U_i$. On obtient ainsi $A = UT$.

Prop (*Inégalité d'Hadamard*) : $\boxed{|\det A| \le \|A_1\|\, \|A_2\|, ... \|A_n\|}$.

Preuve : On a $|\det A| = |\det T| = |t_{11} t_{22} ... t_{nn}|$. Or, $A_j = UT_j$, donc $\|A_2\| \ge |t_{jj}|$.

Variante directe : On note b_k le projeté de a_k sur $\mathrm{Vect}(a_1, ..., a_{k-1})^\perp$.
On a alors $|\det(a_1, a_2, ..., a_n)| = |\det(b_1, b_2, ..., b_n)| = \|b_1\|\, \|b_2\|, ... \|b_n\| \le \|a_1\|\, \|a_2\|, ... \|a_n\|$.
Avec égalité ssi $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$, c'est-à-dire $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est une base orthogonale.

Exemple : Toute matrice réelle trigonalisable est trigonalisation dans une base orthonormée.
En effet, avec $A = PBP^{-1}$, on applique la décomposition d'Iwasawa à P, qui s'écrit donc $P = UT$.
On obtient $A = U(TBT^{-1})U^{-1}$, et si B est triangulaire supérieure, alors TBT^{-1} est triangulaire supérieure.

Espaces euclidiens : Compléments

1) Distance à un sev et minimisation

a) *Projeté et distance d'un point à un sev*

Principe : Soit F un sev et $x \in E$. On considère $d(x, F) = \inf\{\|x - z\|,\, z \in F\}$.

$\boxed{\text{Il existe un unique vecteur } y \in F \text{ tel que } d(x,F) = \|x-y\|, \text{ et } y \text{ est le projeté orthogonal de } x \text{ sur } F}$.

En effet, si $z \in F$, on a par Pythagore, $\|x-z\|^2 = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$.

IMPORTANT : $d(x,F)^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

Remarque : Si $(e_1, ..., e_n)$ est une BON de F, alors $\boxed{y = \sum_{k=1}^n (x \mid e_k) e_k \text{ et } d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n (x \mid e_k)^2}$.

Si $(f_1, ..., f_p)$ est une BON de $F^\perp$, alors $d(x,F)^2 = \sum_{k=1}^p (x \mid f_k)^2$.

Exemple : Calcul du projeté y de x sur un plan $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
Si (u, v) est orthogonale, $\left(\dfrac{u}{\|u\|}, \dfrac{v}{\|v\|}\right)$ est une BON, donc $y = \dfrac{(x \mid u)}{\|u\|^2} u + \dfrac{(x \mid v)}{\|v\|^2} v$.

Dans le cas général, on peut calculer y de deux façons :

- On orthogonalise (u, v) par le procédé de Gram-Schmidt.

- Mieux : on cherche y sous la forme $\alpha u + \beta v$, et on écrit que $(x - y)$ est orthogonal à u et à v.

D'où le système : $\begin{cases} (\alpha u + \beta v \mid u) = (x \mid u) \\ (\alpha u + \beta v \mid v) = (x \mid v) \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha(u \mid u) + \beta(v \mid u) = (x \mid u) \\ \alpha(u \mid v) + \beta(v \mid v) = (x \mid v) \end{cases}$

On obtient un système de Cramer d'inconnue (α, β), car $\Delta = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \mid v)^2 > 0$ par Cauchy-Schwarz.

b) *Exemple de minimisation*

Exemple : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue.
On veut déterminer les valeurs de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles $\int_0^1 (f(t) - a - bt)^2 \, dt$ est minimum.

Autrement dit, en considérant $E = C^0([a,b], \mathbb{R})$ de la norme euclidienne $\|g\|_2 = \sqrt{\int_0^1 g(t)^2 \, dt}$, on cherche à minimiser $\|f - L\|_2^2$, où L est une droite affine.

Par a), $\|f - L\|_2^2$ est minimum lorsque L est le projeté de f sur $F = \mathrm{Vect}(1, t)$ le sev des fonctions affines.

On détermine $L(t) = a + bt$ par $\begin{cases} a(1 \mid 1) + b(t \mid 1) = (f \mid 1) \\ a(1 \mid t) + b(t \mid t) = (f \mid t) \end{cases}$ $\begin{cases} a + \frac{1}{2} b = (f \mid 1) \\ \frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b = (f \mid t) \end{cases}$

On obtient $a = 4(f \mid 4 - 6t)$ et $b = (f \mid -6 + 12t)$.

Remarque : On peut prendre $E = \mathrm{Vect}(1, t, f)$ au lieu de $C^0([a,b], \mathbb{R})$ (de sorte à être en dim finie).

Exemple : On veut minimiser $\int_0^{+\infty} (t^2 - a - bt)^2 e^{-t} \, dt$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) \, e^{-t} \, dt$.
Alors $\int_0^{+\infty} (t^2 - a - bt)^2 e^{-t} \, dt$ est minimum lorsque $(a + bX)$ est le projeté de X^2 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$.

2) Polynômes orthogonaux

a) *Propriétés générales* : Soit $(\ \mid\ )$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{\text{il existe un unique polynôme unitaire } B_n \text{ de degré } n \text{ orthogonal à } \mathbb{R}_{n-1}[X]}$.
En effet, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est une droite, et toute droite contient un unique polynôme unitaire (c'est-à-dire un polynôme non nul de coefficient dominant 1).

Remarque : En fait, B_n est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Prop : $\boxed{\text{Il existe une (unique) base orthogonale } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de } \mathbb{R}[X] \text{ de polynômes unitaires de degrés échelonnés}}$.

Preuve : On applique le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) *Propriétés générales associées à un produit scalaire de la forme* $(P \mid Q) = \int_a^b P(t)Q(t)\ \omega(t)\ dt$.

Soit $\omega :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue et strictement positive sur $]a,b[$, et telle que les intégrales considérées existent.

Prop : Alors $(P,Q) \longmapsto (P \mid Q)$ définit un produit scalaire. Elle est définie positive par le lemme :

Lemme : $\boxed{\text{Si } g \text{ est continue positive, alors } \int_a^b g(t)\ dt \geq 0 \text{, avec égalité ssi } g \text{ est identiquement nulle}}$.

Considérons la base orthogonale $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ de polynômes unitaires de degrés échelonnés.
Ainsi, B_n est le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Prop : $\boxed{\text{La suite } (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie une relation de récurrence d'ordre 2}}$ de la forme

$$B_{n+1} = (X - \alpha_n)B_n + \beta_n B_{n-1}$$

Preuve : On a $(XP \mid Q) = (P \mid XQ)$. Donc $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $(XB_n \mid Q) = (B_n \mid XQ) = 0$.
Donc $XB_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]^\perp$. Donc $XB_n \in \mathrm{Vect}(B_{n+1}, B_n, B_{n-1})$.
En effet, $XB_n = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k B_k$, et $\lambda_k = (XB_n \mid B_k) = 0$ pour $k \leq n-2$.

Remarque : Si de plus $a = -b$ et que ω est pair, alors $B_n(X) = (-1)^n B_n(-X)$ et $\alpha = 0$.

Prop : $\boxed{\text{Le polynôme } B_n \text{ admet } n \text{ racines distinctes sur }]a,b[\text{ (et donc est scindé à racines simples}}$).

Preuve : La propriété résulte du lemme suivant :

Lemme : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_a^b f(t)P(t)\ dt = 0$.

Alors f admet au moins n zéros sur $]a,b[$ en lesquels elle change de signe.

Remarque : L'hypothèse est équivalente à : $\forall k \in \{0,1,2,...,n\}$, $\int_a^b f(t)t^k\ dt = 0$.

Preuve : On suppose par l'absurde que f change de signe en r points, avec $r < n$.
On considère $P(X) = (X - a_1)...(X - a_r)$, où $a_1, ..., a_r$ sont les points où f change de signe.
Alors $\forall t \in [a,b]$, $f(t)P(t) \geq 0$. Comme $\deg P = r < n$, alors $\int_a^b f(t)P(t)\ dt = 0$.
Donc $\forall t \in [a,b]$, $f(t)P(t) = 0$, donc f est identiquement nulle (par continuité), d'où une contradiction.

Polynômes de Legendre

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_{-1}^{+1} P(t)Q(t)dt$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $R_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = (R_n)^{(n)}$ (dérivée n-ième de R_n). On a $\deg L_n = n$.

En intégrant par parties, on a $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $(L_n \mid P) = (-1)^n (R_n \mid P^{(n)})$.
On en déduit que $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(L_n \mid P) = 0$. Donc $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

On peut montrer que $L_{n+1} = (4n+2)XL_n - 4n^2 L_{n-1}$.

Polynômes de Tchebychev

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_{-1}^{+1} \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$. On a $(P \mid Q) = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos\theta)$.
On en déduit aisément que la base $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev est orthogonale.
En effet, $(T_n \mid T_m) = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\ dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)\ dt$.

On a $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

Polynômes de Laguerre

Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $(P \mid Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\ dt$. On pose $H_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$.
On a $\deg H_n = n$, et on peut montrer que $(H_n \mid H_m) = 0$ pour tous $n > m$.