$\boxed{\textbf{Endomorphismes et matrices symétriques}}$

E est un espace vectoriel euclidien de dimension n.

1) Endomorphismes symétriques

a) *Prop et def* : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\boxed{\text{Pour tous } x \text{ et } y \in E, \text{ on a } \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle}$.

ii) $\boxed{\text{La matrice } A \text{ de } u \text{ dans une (toute) base orthonormée est symétrique, c'est-à-dire } A = A^T}$.

Dans ce cas, on dit que u est symétrique.

Preuve : Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, le coefficient a_{ij} de A est la i-ième coordonnée de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Donc si $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $\boxed{a_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle}$. On en déduit que si u est symétrique, alors A est symétrique.

Réciproquement, si A est symétrique, alors $\langle u(e_j), e_i\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$ pour tous i et j, d'où i) par bilinéarité.

Important : Matriciellement, on a $\boxed{\langle x, u(y)\rangle = (X \mid AY) = X^T AY = X^T A^T Y = (AX \mid Y) = \langle u(x), y\rangle}$

Remarque : L'ensemble des endomorphismes symétriques est un sev de $\mathcal{L}(E)$ isomorphe au sev $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques, donc de dimension est $\frac{1}{2}n(n+1)$.

Prop : $\boxed{\text{Si } u \text{ est symétrique et si } F \text{ est stable par } u, \text{ alors } F^\perp \text{ est stable par } u}$.

Preuve : Supposons $u(F) \subset F$. Si $x \in F^\perp$, alors $\forall y \in F$, $\langle x, u(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$, donc $u(x) \in F^\perp$.

b) Projections et symétries orthogonales

Prop : Les projections et les symétries orthogonales sont symétriques.

- s est une symétrie orthogonale ssi sa matrice S dans une BON vérifie $S = S^{-1} = S^T$.

- La projection p dans $\mathbb{R}^n$ sur la droite $\mathbb{R}Z$ est $p(X) = (Z \mid X)Z = Z({}^T ZX) = (ZZ^T)X$.

Ainsi, $\boxed{ZZ^T \text{ est la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale sur la droite } \mathbb{R}Z}$.

Plus généralement, si $(Z_1, ..., Z_r)$ est une BON de F, la matrice de la projection sur F est $M = \sum_{i=1}^{p}(Z_i Z_i^T)$.

2) Théorème fondamental.

a) *Prop* : Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique u sont orthogonaux. Autrement dit, si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u, alors les sev propres associés sont en somme directe orthogonale.

Preuve : Supposons $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, et $\lambda \neq \mu$. Il s'agit de prouver que $\langle x, y\rangle = 0$.

Or, on a $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$, c'est-à-dire $\lambda \langle x, y\rangle = \mu \langle x, y\rangle$. Comme $\lambda \neq \mu$, alors $\langle x, y\rangle = 0$.

b) *Théorème (admis)* :

$\boxed{\text{Un endomorphisme } u \in \mathcal{L}(E) \text{ est symétrique ssi il est diagonalisable dans une base orthonormée}}$.

Autrement dit, $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique ssi il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $u(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Corollaire : $\boxed{\text{Toute matrice symétrique } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est diagonalisable dans une base orthonormée}}$.

$\boxed{\text{Autrement dit, il existe une matrice orthogonale } U \in O_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } U^{-1}AU \text{ est diagonale}}$.

Remarque : Comme U est orthogonale, alors $\boxed{U^{-1}AU = U^TAU}$.

Remarque : L'endomorphisme associé à une matrice est symétrique ssi la matrice est symétrique.

c) *Prop* : Un projecteur est orthogonal ssi il est symétrique. De même pour les symétries.

Remarque : La matrice d'une symétrie orthogonale vérifie $S = S^T = S^{-1}$ (et deux égalités impliquent la troisième).

3) Endomorphismes symétriques et (définis) positifs.

a) Propriété fondamentale

Important : Supposons u symétrique. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, avec $u(e_i) = \lambda_i e_i$.

$\boxed{\text{Pour } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ on a } u(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i e_i, \text{ d'où } \langle x, u(x)\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}$.

Conséquence : $\sup_{x\neq 0} \dfrac{\langle x, u(x)\rangle}{\|x\|^2} = \sup_{1\leq i\leq n}(\lambda_i)$.

b) Endomorphismes symétriques (définis) positifs

Def : Soit u un endomorphisme symétrique.

On dit que u est positif ssi $\langle x, u(x)\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire ssi les valeurs propres de u sont positives.

On dit que u est défini positif ssi $\langle x, u(x)\rangle > 0$ pour tout x non nul, c'est-à-dire ssi les valeurs propres de u sont strictement positives. De même pour les matrices symétriques (en considérant l'endomorphisme symétrique associé).

c) Matrices de Gram et matrices symétriques positives

Remarque : Les matrices de la forme M^TM sont appaelées matrices de Gram.

Le coefficient (i,j) de la matrice M^TM est le produit scalaire $(M_i \mid M_j)$, où les M_j sont les colonnes de M.

Prop : $\boxed{\text{Une matrice réelle } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est symétrique positive ssi il existe } M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = M^TM}$.

De même, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive ssi il existe $M \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^TM$.

Preuve : Supposons $A = M^TM$. La matrice A est symétrique, et $\boxed{(X \mid AX) = X^TAX = (MX)^T(MX) = \|MX\|^2 \geq 0}$.

Réciproquement, supposons A symétrique positive. Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^TAU = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs propres A. Comme les valeurs propres sont positives, alors $\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D^2$, où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\sqrt{\lambda_i}$. en posant $V = U^T = U^{-1}$, on a $A = V^TD^2V = V^TD^TDV$, donc $M = DV$ convient.

$\boxed{\textbf{Formes quadratiques}}$

1) Formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace euclidien E.

a) *Def* : On dit que $q : E \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E ssi il existe une forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ telle que $q(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in E$.

Identité polaire : On a $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(q(x + y) - q(x) - q(y))$.

Expression matricielle : Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E. On pose $A = (\varphi(e_i, e_j))_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$. Comme φ est symétrique, la matrice M est symétrique, appelé matrice de φ (ou de q) dans la base $\mathcal{B}$.

Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\boxed{\varphi(x, y) = X^T AY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\, x_i y_j \text{ et } q(x) = X^T AX}$, avec $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = E_i^T AE_j$.

Remarque : Si A et B sont deux matrice symétriques telles que $X^T AX = X^T BX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, alors $A = B$. En effet, elles définissent la même forme quadratique q (associée à φ), et on a alors $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = b_{ij}$.

b) *Exemple* : On considère $x = (x, y) = X$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$\boxed{\text{La forme quadratique sur } \mathbb{R}^2 \text{ associée à la matrice } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ est } q(x) = {}^tXAX = ax^2 + 2bxy + cy^2.}$$

Plus généralement, dans $\mathbb{R}^n$, si $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n}$, alors $X^T AX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{i<j} a_{ij}x_i x_j$.

c) *Cas des produits scalaires.* On dit que φ (ou q) est un produit scalaire ssi φ est définie positive.

Prop : La forme quadratique q est un produit scalaire ssi la matrice M est définie positive.

Exemple : Les produits scalaires sur $\mathbb{R}^2$ correspondent aux $q(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, avec $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.

2) Orthogonalisation des formes quadratiques.

a) *Effet d'un changement de bases sur la matrice d'une forme quadratique.*

Prop : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et q une forme quadratique de E. On pose $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

On note A et A' les matrices de q dans la base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Alors $\boxed{A' = P^T AP}$.

Preuve : On note X et X' les coordonnées de $x \in E$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a $X = PX'$. Or, on a aussi $q(x) = X^T AX = (X')^T A'X'$. D'où $(X')^T P^T APX' = (X')^T A'X'$ pour tout vecteur $X' \in \mathbb{R}^n$. Donc $P^T AP = A'$.

b) *Def* : Soit q une forme quadratique. On dit que $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est q-orthogonale ssi $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i \ne j$.

Important : La base $\mathcal{B}$ est q-orthogonale ssi la matrice A de q dans $\mathcal{B}$ est diagonale.

Dans ce cas, $\boxed{\text{si } A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \text{ et } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ alors } q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2.}$

c) *Théorème* : Soit q une forme quadratique sur E. Il existe une base q-orthogonale.

Preuve : Soit $\mathcal{B}$ une base arbitraire de E. Comme A est symétrique, il existe une matrice orthogonale $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^{-1}AU$ est diagonale. Mais on a $U^{-1}AU = U^T AU$. Donc le changement de bases associé à U convient.

3) Co-orthogonalisation d'une forme quadratique et d'un produit scalaire.

Théorème fondamental : Soit q une forme quadratique sur $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

$$\boxed{\text{Alors il existe une base } \mathcal{B} \text{ qui est à la fois orthogonale pour } q \text{ et orthonormée pour le produit scalaire canonique.}}$$

Conséquence : Si S est la sphère unité de $\mathbb{R}^n$, $\max\{q(\overrightarrow{x}),\ \overrightarrow{x} \in S\}$ est la plus grande valeur propre de $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.

Preuve : On considère A la matrice de q dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$. Il existe une matrice orthogonale $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T AU = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = D$. La base orthonormée définie par les colonnes de U convient.

Dans $\mathcal{B}$, on a $q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_m \|\overrightarrow{x}\|^2$, où $\|\overrightarrow{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $\lambda_m = \max(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, avec égalité pour $x = e_m$.

Corollaire : Soient q et q' deux formes quadratiques sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On suppose que q' est un produit scalaire.

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ qui est à la fois q-orthogonale et q'-orthonormée.

Preuve : L'espace euclidien (E, q') est isomorphe à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique (en choisissant une base q'-orthonormée de E). On est donc ramené au cas traité au a).

4) Lien entre endomorphismes symétriques et formes quadratiques d'un espace euclidien E.

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

La forme quadratique q associée à u est définie par $\boxed{q(x) = (x \mid u(x))}$. Dans une BON $\mathcal{B}$, $q(x) = {}^tXAX$.

Prop : Dans toute BON $\mathcal{B}$ de E, la matrice de q dans $\mathcal{B}$ est égale à la matrice de u dans $\mathcal{B}$.

Preuve : $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = (e_i \mid u(e_j))$ est la i-ième coordonnée de $u(e_j)$. *Attention* : Cela est faux dans une base quelconque.

Important : Un changement de BON est associé à une matrice de passage orthogonale U, et on a ${}^tUAU = U^{-1}AU$.

Adjoint d'un endomorphisme ou d'une matrice

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note u et v les endomorphismes respectivement associés à A et A^T.

Pour tous vecteurs X et $Y \in \mathbb{R}^n$, on a $\boxed{X^T AY = (A^T X)^T Y \quad \text{c'est-à-dire } \langle x, u(y)\rangle = \langle v(x), y\rangle}$.

Terminologie : L'endomorphisme v est appelé adjoint de u.

1) Rang de l'adjoint.

Prop : $\boxed{\mathrm{Ker}\, u = (\mathrm{Im}\, v)^\perp}$.

Preuve : $y \in \mathrm{Ker}\, u \Leftrightarrow u(y) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle x, u(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \langle v(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow y \in (\mathrm{Im}\, v)^\perp$.

Corollaire : $\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\, v$, c'est-à-dire $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\ A^T$.

2) Applications de l'adjoint à l'obtention des hyperplans stables.

Remarque importante : Une droite $D = \mathbb{R}x$ est stable par u ssi x est un vecteur propre de u.

Prop : Soit $H = x^\perp$ un hyperplan de E. Alors H est stable par u ssi x est un vecteur propre de v.

Preuve : H est stable par u ssi $\forall y \in H$, $\langle x, u(y)\rangle = 0$, donc ssi $\forall y \in H$, $\langle v(x), y\rangle = 0$, c'est-à-dire $v(x) \in H^\perp = \mathbb{R}x$.

Interprétation intuitive : $\boxed{\text{La matrice } A \text{ opère sur les vecteurs, sa transposée } A^* \text{ opère sur les formes linéaires}}$.

Exemple : Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Les matrices A et A^T admettent les mêmes valeurs propres 1 et 2. Pour obtenir les sous-espaces propres de A, on résout le système $AX = X$ et $AX = 2X$. Pour A, on obtient les sev propres $E_1 = \mathrm{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1)$ et $E_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$.

Pour A^T, on obtient les sev propres $E_1' = \mathrm{Vect}(1, 0, 0)$ et $E_2' = \mathbb{R}(1, 1, 1)$. On en déduit que les sev stables par u sont $\{0\}$ et $E = \mathbb{R}^3$, **t**outes les droites vectorielles incluses dans le plan E_1, ainsi que la droite $E_2 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$, et les deux plans d'équation $x = 0$ et $x + y + z = 0$, qui sont respectivement les orthogonaux de E_1' et E_2'.

Remarque : A défaut de connaître ce résultat, on peut chercher directement les plans stables en posant $P : ax + by + cz = 0$. On détermine alors l'image de P par u : Avec $(x', y', z') = u(x, y, z)$, on exprime (x, y, z) en fonction de (x', y', z'), et on obtient une équation de $u(P)$, qui est proportionnelle à celle de P ssi P est stable par u.

3) Applications aux normes des endomorphismes.

On note $S = A^T A$. La matrice S est symétrique. L'endomorphisme $v \circ u$ associé à S est symétrique positif.

On a $\boxed{\|u(x)\|^2 = \langle (v \circ u)(x), x\rangle}$. En effet, on a $\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x)\rangle = \langle (v \circ u)(x), x\rangle$.

On a $\mathrm{Ker}(v \circ u) = \mathrm{Ker}\, u$.

En effet, comme $w = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}\, u \subset \mathrm{Ker}\, w$. Réciproquement, si $w(x) = 0$, alors $\|u(x)\| = 0$, donc $u(x) = \overrightarrow{0}$.

Comme S est symétrique, l'endomorphisme w est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$.

Ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont réelles et positives, puisque $\lambda_k = \|u(e_k)\|^2$.

Remarque : Pour $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E$, on a $\|u(x)\|^2 = \langle w(x), x\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k |x_k|^2$.

On en déduit que $\boxed{\sup_{x \neq \overrightarrow{0}} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sqrt{\max(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)}, \text{ où } \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \text{ sont les valeurs propres de } v \circ u.}$.

4) Décomposition polaire.

Prop : Toute matrice de $GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit comme $A = SU$, avec S symétrique positive, et U orthogonale.

Preuve : On note que si S et U existent, alors $AA^T = S^2$. Or, la matrice AA^T est symétrique, donc diagonalisable dans une BON, et à valeurs propres positives. Ainsi, $AA^T = P^{-1} \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)P$, avec P orthogonale.

On prend alors $S = P^{-1} \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ..., \sqrt{\lambda_n})P$. La matrice S est symétrique positive, et $S^2 = AA^T$.

On pose $U = S^{-1}A$. Comme $UU^T = S^{-1}AA^T S^{-1} = AA^T S^{-2} = I_n$, car des matrices diagonales commutent.

Remarque : En adaptant la preuve, on vérifie aisément que la décomposition est unique (on commence par S).

Remarque culturelle : On peut étendre la propriété au cas $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en utilisant la densité de $GL_n(\mathbb{R})$ et la compacité de $O_n(\mathbb{R})$. En effet, il existe une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles convergeant vers A. Les A_k s'écrivent $S_k U_k$. Par compacité de $O_n(\mathbb{R})$, il existe une suite extraite de $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $U \in O_n(\mathbb{R})$. Quitte à considérer la suite extraite, on peut donc supposer $\lim_{n\to+\infty} U_k = U$. On a alors $\lim_{k\to+\infty} S_k = AU^{-1}$. La matrice $S = AU^{-1}$ est symétrique comme limite de matrices symétriques. La décomposition n'est en général pas unique.