Réduction des endomorphismes et des matrices

0) Rappels

a) *Matrices semblables*

Deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ sont semblables ssi elles vérifient les propriétés suivantes, qui sont équivalentes :

i) Il existe $P \in GL_n(K)$ telles que $B = P^{-1}AP$

ii) Les matrices A et B représentent un même endomorphisme : Il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E telles que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} u$.

Remarque : Si A et B sont semblables, alors A^n et B^n sont semblables (pour tout $n \in \mathbb{N}$).
En effet, si $B = P^{-1}AP$, alors $B^n = (P^{-1}AP)^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)...(P^{-1}AP) = P^{-1}A^nP$.
Autre preuve : On a $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ et $B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} u$, d'où $A^n = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u^n$ et $B^n = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} u^n$.

b) *Trace d'une matrice et déterminant d'un endomorphisme*

Def : Pour $A = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le n} \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Prop : $\boxed{\text{Pour } A \text{ et } B \in \mathcal{M}_n(K), \text{ on a } \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$.

Preuve : $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(BA)$ par Fubini.

Prop : $\boxed{\text{Deux matrices semblables ont même trace et même déterminant}}$.

Preuve : On a $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) = \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$.
Et on a $\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det A$, car $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$.

Def : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E espace vectoriel de dimension finie.
On pose $\operatorname{tr} u = \operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u)$ et $\det u = \det(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u)$, où $\mathcal{B}$ est une base (arbitraire) de E.
Cette définition est valide car la valeur de $\operatorname{tr}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u)$ ne dépend pas du choix de $\mathcal{B}$.

1) Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme

a) *Sous-espaces stables*

Def : Soit un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E. $\boxed{\text{On dit que } F \text{ est stable par } u \text{ ssi } u(F) \subset F}$.
Dans ce cas, l'endomorphisme $u_{|F} : F \to F \quad x \longmapsto u(x)$ est bien défini et appelé restriction de u à F.

Exemples fondamentaux : $\{0\}$, E, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par u.

b) *Interprétation matricielle*

IMPORTANT : On suppose E de dimension finie n, et F un sev de E de dimension p.
Soient G un supplémentaire de F, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

$\boxed{\text{Alors } F \text{ est stable par } u \text{ ssi } \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u \text{ est de la forme } \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{q,p} & B \end{array}\right)}$, où $p = \dim$ et$A \in \mathcal{M}_p(K)$.

Dans ce cas, A est la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme $u_{|F} \in \mathcal{L}(F)$.

c) *Matrices triangulaires supérieures*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base de E. Posons $F_j = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_j)$, pour $j \in \{1, 2, ..., n\}$.
Alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire supérieure ssi les espaces F_j sont stables par u.

De plus, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est triangulaire supérieure inversible ssi $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, $u(F_j) = F_j$.
On en déduit alors que u est inversible et $\forall j \in \{1, 2, ..., n\}$, $u^{-1}(F_j) = F_j$.
Donc l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est aussi triangulaire supérieure.

Remarque : Il en est de même pour une matrice triangulaire inférieure (car $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$).

d) *Sous-espaces stables supplémentaires*

Def : On suppose $E = F \oplus G$, et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.
Alors si F et G sont stables par u ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A & O_{p,q} \\ \hline O_{q,p} & B \end{array}\right)$, où $p = \dim F$ et $q = \dim G$.
De plus, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}\, u_{|F}$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2}\, u_{|G}$.

Plus généralement, si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_r$ est une base adaptée à $E = E_1 \oplus ... \oplus E_r$ et si les E_i sont stables par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est diagonale par blocs.

Exemple : La projection sur F parallèlement à G est l'unique $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u_{|F} = \mathrm{Id}_F$ et $u_{|G} = 0_G$.

e) *Endomorphismes commutants*

Prop : Si $v \circ u = u \circ v$, alors $\mathrm{Ker}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ sont stables par u.

Remarque : Il en est donc de même de $\mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(v - \mathrm{Id})$, car u et $v - \mathrm{Id}$ commutent alors aussi.

Preuve : Si $x \in \mathrm{Ker}\, v$, alors $u(x) \in \mathrm{Ker}\, v$, car $v(u(x)) = u(v(x)) = u(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.
Si $y = v(x) \in \mathrm{Im}\, v$, alors $u(y) \in \mathrm{Im}\, v$, car $u(y) = v(u(x))$.

f) *Matrices compagnons*

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x \in E$. Considérons r le plus grand entier tel que $(x, u(x), ..., u^{r-1}(x))$ est libre.
L'entier r existe nécessairement car E est de dimension finie.
Par définition de r, la famille $(x, u(x), ..., u^r(x))$ est liée, donc $u^r(x) \in \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{r-1}(x))$.
ainsi, $F = \mathrm{Vect}(x, u(x), ..., u^{r-1}(x)$ est stable par u, et $\mathcal{B} = (x, u(x), ..., u^{r-1}(x))$ en est une base.
La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la restriction de u à F est la matrice (dite matrice compagnon) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & -a_1 \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(K), \text{ avec } u^r(x) = \sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k(x)$$

2) Vecteurs propres, sous-espaces propres (notions valables en dimension quelconque)

a) *Vecteurs propres, valeurs propres*

Def : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que x est vecteur propre de u ssi $x \neq 0$ et il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce cas, λ est unique, et on dit que λ est la valeur propre associée à x.

Définition : On dit que $\lambda \in K$ est valeur propre de u ssi il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Terminologie : On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Def : Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(K)$ sont les valeurs propres de l'endomorphisme associé $u : X \longmapsto AX$.

Exemple : Les valeurs propres de $A + \alpha I$ sont les $\lambda + \alpha$, où λ décrit le spectre de A.

En effet, $AX = \lambda X$ ssi $(A + \alpha I)X = (\lambda + \alpha)X$.

b) *Sous-espaces propres*

Définition : On note $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$, appelé sev propre de u associé à λ.

Important : λ est valeur propre de u ssi $E_\lambda \neq \{0\}$.

Exemple : $u : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \quad y \longmapsto y'$. Tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre, et $E_\lambda = \mathbb{C}e_\lambda$, où $e_\lambda : t \longmapsto \exp(\lambda t)$.

Exemple : $u : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N} \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre, et $E_\lambda = \mathbb{C}e_\lambda$, où $e_\lambda = (\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Important : En pratique, on détermine le sev propre E_λ en résolvant l'équation linéaire $u(x) = \lambda x$.

Prop : Des sous-espaces propres associés à des valeurs (propres) distinctes sont en somme directe.

Autrement dit, si $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ sont deux à deux distincts , alors $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}$.

c) *Droites stables*

Remarque : Tout sous-espace propre E_λ par u, et la restriction de u à E_λ est l'homothétie vectorielle $\lambda\,\mathrm{Id}$.

Les droites stables par u sont les droites dirigées par un vecteur propre : en effet $u(Kx) \subset Kx$ ssi $u(x) \in Kx$.

Autrement dit, les droites stables sont les droites incluses dans un sev propre.

Remarque : Dans un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, il existe une infinité de droites stables ssi il existe au moins un sev propre de dimension supérieure ou égale à 2 (c'est-à-dire qui contienne un plan).

3) Polynôme caractéristique (notions spécifiques à la dimension finie)

a) *Polynôme caractéristique*

Def : Pour $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$, appelé polynôme caractéristique de A.

Remarque : $\chi_A(0) = (-1)^n(\det A)$ est non nul ssi A est inversible.

Exemples :

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(K)$, alors $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$.

- Si $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ est triangulaire, alors $\chi_T(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n)$.

Remarque : Deux matrices triangulaires semblables ont, à l'ordre des termes près, les mêmes coefficients diagonaux.

Prop : χ_A est un polynôme de degré n et unitaire.

Important :

- Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.

En effet, pour tout $x \in K$, la transposée de $(xI_n - A)$ est $(xI_n - {}^tA)$, donc ces matrices ont même déterminant.

- Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

En effet, si $A' = P^{-1}AP$, alors $(xI_n - A') = P^{-1}(xI_n - A)\,P$, donc $\det(xI_n - A') = \det(xI_n - A)$.

Def : (*polynôme caractéristique d'un endomorphisme*) Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\chi_u(x) = \det(x\,\mathrm{Id} - u)$.

Important : $\boxed{\text{Si } A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u, \text{ alors } \chi_A = \chi_u}$. En effet, $xI_n - A$ est la matrice de $(x\,\mathrm{Id} - u)$.

b) *Caractérisation des valeurs propres (en dimension finie)*

Prop : $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u \text{ ssi } \lambda \text{ est racine du polynôme caractéristique de } u}$.

Remarque : De même avec les matrices (d'ailleurs on peut identifier A avec l'endomorphisme associé à A).

Preuve : λ valeur propre de $u \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow (u - \lambda\,\mathrm{Id})$ non injectif donc non bijectif $\Leftrightarrow \det(\lambda\,\mathrm{Id} - u) = 0$.

Remarque : En dim finie, u est bijectif ssi 0 n'est pas valeur propre, c'est-à-dire racine du polynôme caractéristique.

Corollaire : Tout endomorphisme d'un K-ev de dimension n admet au plus n valeur propres.

Remarque : Cette propriété résulte aussi du fait que les sev propres sont en somme directe.

Remarque : Les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres, mais les sev propres ne sont pas les mêmes.

c) *Polynôme caractéristique d'une restriction*

Prop : Soit F un sev de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$.
Notons v l'endomorphisme de F défini par la restriction de u à F. Alors χ_v divise χ_u.

Preuve : On considère une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ adaptée à $F \oplus G = E$, où G est un supplémentaire de F dans E.
On a alors $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$, où $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_1} v$. On en déduit que $\chi_u(x) = \chi_v(x) Q(x)$, avec $Q = \chi_C$.

Exemple : Si $\operatorname{rg} u = r$, alors $\dim E_0 = \dim(\operatorname{Ker} u) = n - r$, et $\chi_u(x)$ est de la forme $x^{n-r} Q(x)$.

d) *Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sev propre*

Prop : Soit $\lambda \in K$. $\boxed{\text{Notons } m \text{ l'ordre de multiplicité de } \lambda \text{ comme racine de } \chi_u}$.
$\boxed{\text{Notons } d \text{ la dimension du sev propre } E_\lambda, \text{ c'est-à-dire } d = \dim \operatorname{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})}$.
$\boxed{\text{Alors } d \leq m. \text{ D'autre part, si } m = 1, \text{ alors } d = 1}$.
Ainsi, si λ est racine simple de χ_u, alors E_λ est une droite vectorielle.

Preuve : On considère v la restriction de u à E_λ. On a donc $v = \lambda\,\mathrm{Id}$, et $\chi_v(x) = (x - \lambda)^d$.
Comme χ_v divise χ_u, alors $d \leq m$.

D'autre part, si $m = 1$, alors λ est racine de χ_u, donc λ est valeur propre de u, d'où $d \geq 1$.
On en conclut que $1 \leq d \leq m$, c'est-à-dire $d = 1$.

4) Endomorphismes trigonalisables

a) *Endomorphismes et matrices trigonalisables*

Def : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est triangulaire (supérieure).

Def : $\boxed{\text{On dit que } A \in \mathcal{M}_n(K) \text{ est trigonalisable ssi } A \text{ est semblable à une matrice triangulaire (supérieure)}}$, c'est-à-dire ssi l'endomorphisme associé à A est trigonalisable.

Remarque : $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable ssi une (toute) matrice qui le représente est trigonalisable.

Remarque : Toute matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
En effet, toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$ est semblable à la matrice $A' = (a_{n+1-i, n+1-j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$.

Il suffit de considérer le changement de bases où on passe de $(e_1, e_2, ..., e_{n-1}, e_n)$ à $(e_n, e_{n-1}, ..., e_2, e_1)$.

Remarque culturelle : En fait, toute matrice est semblable à sa transposée, mais la preuve est très difficile.

b) *Condition nécessaire et suffisante de trigonalisabilité portant sur le polynôme caractéristique*

Prop : $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire : $\boxed{u \in \mathcal{L}(E) \text{ est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé}}$.

Preuve : $(\Rightarrow)$: Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est scindé.

$(\Leftarrow)$: On raisonne matriciellement et par récurrence sur n. La propriété est immédiate pour $n = 0$.
Supposons χ_A scindé, de degré $n \geq 1$. Notons u l'endomorphisme associé à A.
Comme χ_u est scindé, u admet au moins une valeur propre λ et un vecteur propre e_1.
On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est de la forme $A' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & L \\ \hline O & B \end{array}\right)$.
On a $\chi_u(x) = (\lambda - x)\chi_B(x)$. Comme χ_B divise χ_u et que χ_u est scindé, alors χ_B est scindé.
Par hypothèse de récurrence appliquée à B, il existe une matrice inversible $Q \in GL_{n-1}(K)$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_{n-1}(K)$ telles que $Q^{-1}MQ = T$.
Posons $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q \end{array}\right)$. On a $P \in GL_n(K)$, et $P^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & O \\ \hline O & Q^{-1} \end{array}\right)$, d'où $P^{-1}A'P = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & LQ \\ \hline O & T \end{array}\right)$.
Donc $P^{-1}A'P$ est triangulaire supérieure, donc A, qui est semblable à A', est trigonalisable.

Remarque : Il est essentiel dans cette preuve de passer par les matrices.

5) Endomorphismes dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

a) *Prop* : $\boxed{\text{Tout endomorphisme d'un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.}}$

Preuve : Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

Remarque : En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une valeur propre. Cette propriété est fausse en dimension infinie, par exemple $u : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \quad P \longmapsto XP$.

b) Important : $\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ est trigonalisable}}$, et semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n$ sont les racines du polynôme caractéristique avec les mêmes ordres de multiplicité.
En particulier, on a $\boxed{\det A = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \text{ et } \mathrm{tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n}$.
Ainsi, $\boxed{\chi_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det A}$.

Remarque : En particulier, on retrouve le fait que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant.

Important : $\boxed{\text{Toute matrice } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ peut être considérée comme une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$. Ainsi, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ est triangulaire supérieure (à coefficients complexes).

En particulier, on a $\chi_A(x) = (x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det A)$.

Remarque : En fait, la formule est vraie sur tout corps.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout endomorphisme } u \in \mathcal{L}(E), \text{ on a } \chi_u(x) = (x^n - \mathrm{tr}(u)x^{n-1} + ... + (-1)^n \det u)}$.

6) Endomorphismes diagonalisables

a) *Endomorphismes et matrices diagonalisables*

Def : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) Il existe une base composée de vecteurs propres

ii) $E = \oplus_{i=1}^{r} E_{\lambda_i}$, où $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sont les valeurs propres de u

iii) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est diagonale.

Dans ce cas, on dit que l'endomorphisme u est diagonalisable.

Preuve : i) $\Rightarrow$ ii) Tout vecteur est combinaison linéaire, donc somme de vecteurs propres.
ii) $\Rightarrow$ iii) On choisit une base adaptée à la somme directe. iii) $\Rightarrow$ i) La base $\mathcal{B}$ convient.

Def : Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) L'endomorphisme de K^n associé à A est diagonalisable.

ii) A est semblable à une matrice diagonale.

Dans ce cas, on dit que la matrice A est diagonalisable.

Exemple : $\boxed{\text{La matrice triangulaire } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Sinon, λ étant l'unique valeur propre, elle serait semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_2$, qui n'est semblable qu'à elle-même.

b) *Critère de diagonalisabilité portant sur la dimension des sous-espaces propres*

Prop : Si $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ sont des valeurs propres de u, et si $(\dim E_{\lambda_1}) + (\dim E_{\lambda_2}) + ... + (\dim E_{\lambda_r}) = n$, alors u est diagonalisable et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ sont les seules valeurs propres de u.

Preuve : Comme les sous-espaces propres sont en somme directe, on a $\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r}) = n$.
Donc $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_r} = E$. Donc, pour tout $\lambda \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_r\}$, $E_\lambda = \{0\}$.
Donc les λ_i sont les seules valeurs propres de u, et u est diagonalisable.

c) *Condition suffisante de diagonalisabilité portant sur le polynôme caractéristique*

Prop : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $\dim E = n$.

$\boxed{\text{Tout endomorphisme } u \text{ admettant } n \text{ valeurs propres distinctes est diagonalisable}}$.

Plus précisement, si χ_u admet n racines distinctes $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, alors les λ_i sont les seules valeurs propres de u, et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.
Ainsi, u est diagonalisable, et il existe une base $\mathcal{B}$ où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Preuve : On a $\dim(E_{\lambda_i}) = 1$, donc $\dim(E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_n}) = n$, donc $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_n} = E$.

Remarque : La condition n'est pas nécessaire : Le polynôme caractéristique de $\lambda\, \mathrm{Id}$ est $(\lambda - x)^n$.

Corollaire : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ admettant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$ est diagonalisable et semblable à la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Exemple : Si les λ_i sont distincts, toute matrice triangulaire $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Important : Tout endomorphisme trigonalisable admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

d) *Condition de diagonalisabilité d'un endomorphisme trigonalisable*

Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable. La réciproque est fausse, par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Prop : Soit un endomorphisme trigonalisable. Alors u est diagonalisable ssi pour toute valeur propre λ de u, la dimension de E_λ est égale à l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.

Preuve : Notons m_i et d_i, avec $1 \leq i \leq r$, les ordres de multiplicité et les dimensions des sev propres.
On a $d_i \leq m_i$ et $\sum_{i=1}^r m_i = r$. Or, u est diagonalisable ssi $\sum_{i=1}^r d_i = r$, donc ssi $d_i = m_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Exemple : Avec $\lambda \neq \mu$, $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable alors que $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ l'est.
En effet, pour A comme pour B, les deux seules valeurs propres sont λ et μ.
Comme μ est racine simple du polynôme caractéristique, on a dans les deux cas $\dim E_\mu = 1$.
Mais en résolvant $AX = \lambda X$, on obtient $E_\lambda = K(1,0,0) = Ke_1$ pour A, et $E_\lambda = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ pour B.
Ainsi $E_\lambda \oplus E_\mu \neq E = K^3$ pour A, alors que $E_\lambda \oplus E_\mu = E$ pour B.

7) Réduction des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) *Réduction des matrices de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Prop : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)$.

Alors soit A est diagonalisable soit A est semblable à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Plus précisement :

Premier cas : χ_A admet deux racines distinctes λ et μ. Alors A est diagonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.
En effet, l'endomorphisme associé à A admet deux vecteurs propres de valeurs propres λ et μ, donc il existe une base de vecteurs propres et A est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda, \mu)$: cf 6) c).

Second cas : χ_A admet une racine double λ. Alors $A = \lambda I_2$ ou bien A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Notons u l'endomorphisme associé à A.
Comme λ est racine de χ_u, alors il existe un vecteur propre e_1 de valeur propre λ.
On complète (e_1) en une base $\mathcal{B} = (e_1; e_2)$ de $\mathbb{C}^2$. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
Comme $\mathrm{tr}\, A = \alpha + \beta = 2\lambda$. Donc $\beta = \lambda$. Si $\alpha = 0$, alors $A = \lambda I_2$. Sinon, on conclut par le lemme suivant :

Lemme : $\boxed{\text{Pour } \alpha \neq 0, \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}}$.

Preuve (lemme) : Supposons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base
On considère la base $\mathcal{B}' = (e_1, e_2')$, avec $e_2' = \dfrac{e_2}{\alpha}$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}\, u = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Variante : $P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$.

b) *Réduction des matrices de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (hp)

Prop : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Premier cas : Si les racines de χ_A sont réelles, A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

SECOND CAS : Si les racines complexes de χ_A ne sont pas réelles, elles sont de la forme $a \pm ib$, avec $b > 0$.

La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et semblable à la matrice de similitude directe $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Preuve : Le premier cas se traite comme au a).

Dans le second cas, $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet deux valeurs propres distinctes, donc A est semblable à $\begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$.

Il est en de même de la matrice de similitude directe $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, donc A et M sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On suppose connue la propriété : Deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On en déduit que A et M sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = M$.

8) Pratique de la recherche des valeurs propres et de la diagonalisation d'une matrice

a) *Recherche des valeurs propres*

Plusieurs approches possibles :

- calcul du polynôme caractéristique.

- résolution a priori de l'équation $AX = \lambda X$.

Remarque : Cette méthode est particulièrement efficace pour certaines matrices creuses.

- obtention directe de vecteurs propres et on conclut par dimension que les valeurs obtenues sont les seules.

b) *Condition pratique de diagonalisabilité*

En pratique, pour prouver que u est diagonalisable, il suffit de trouver des valeurs propres de sorte que la somme des dimensions des sev propres associés soit égale à n. La recherche des sev propres se fait souvent en résolvant le système $u(x) = \lambda x$ pour toute valeur propre λ, mais certains vecteurs propres peuvent apparaître de façon évidente.

Exemple : Considérons M la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Alors $\operatorname{rg} M = 1$, donc $\dim E_0 = \dim \operatorname{Ker} M = n - 1$. D'autre part, $\Omega = (1, 1, ..., 1)$ vérifie $M\Omega = n\Omega$.

On en conclut que $\dim E_n \geq 1$, et par dimension, on a $E_n \oplus E_0 = n$, et $\dim E_n = 1$.

Ainsi, M est diagonalisable et semblable à $D = \operatorname{Diag}(n, 0, 0, ..., 0)$.

Plus précisement, $P^{-1}MP = D$, où $P = (\Omega, Z_2, Z_3, ..., Z_n)$, avec $Z_j = (1, ..., 0, -1, 0, ..., 0) = E_1 - E_j$.

Exemple : Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est non nulle.

En effet, $\dim \operatorname{Ker} u = n - 1$, donc le sev propre E_0 est de dimension : $\dim E_0 = n - 1$.

Donc x^{n-1} divise le polynôme caractéristique $\chi_M(x)$, et on a donc $\chi_M(x) = x^{n-1}(x - \lambda)$.

On a $\lambda = \operatorname{tr} A$ somme des valeurs propres de A.

- Si $\lambda \neq 0$, λ est une autre valeur propre, et on a $\dim E_\lambda = 1$, d'où par dimension, $E_0 \oplus E_\lambda = E = K^n$.

On en conclut que A est diagonalisable.

- Si $\lambda = 0$, 0 est la seule valeur propre de A, et comme $\dim E_0 = n - 1$, alors A n'est pas diagonalisable.

c) *Obtention des sous-espaces propres et d'une matrice de passage*

Supposons A diagonalisable. Notons u l'endomorphisme associé à A. L'idée est de choisir une matrice de passage $P = (P_1, ..., P_n)$ de la base canonique à une base formée de vecteurs propres de u.

Plus précisement, pour tout $1 \leq j \leq n$, λ_j est la valeur propre associée au vecteur propre P_j.

On a ainsi $\boxed{AP_j = u(P_j) = \lambda_j P_j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n}$.

Ainsi, la matrice de u dans la nouvelle base est diagonale. On a alors $\boxed{P^{-1}AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)}$.

Remarque : D'ailleurs, les relations $AP_j = u(P_j) = \lambda_j P_j$ s'écrivent aussi $AP = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P$.

Exemple : On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\chi_A(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$.
La matrice A admet deux valeurs propres distinctes -1 et 2, donc est diagonalisable.
En résolvant $AX = 2X$, on obtient $E_2 = \mathbb{R}(1,1)$. En résolvant $AX = -X$, on obtient $E_2 = \mathbb{R}(-2,1)$.
Ainsi, la famille $(P_1, P_2) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs propres.
Avec $P = (P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9) Exemples d'utilisation de la réduction

a) *Calcul des puissances d'une matrice par réduction*

Principe : $\boxed{\text{Si } A = PBP^{-1}, \text{ alors } A^n = PB^nP^{-1}}$.
On cherche donc une matrice B semblable à A de sorte que le calcul de B^n soit le plus simple possible.

Cas particulier important : La situation idéale est celle où $B = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_p)$.
Dans ce cas, les coefficients de A^n sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des λ_k^n.
Ainsi, $A^n = \sum_{k=1}^{p} M_k(\lambda_k)^n$, et on peut trouver les matrices M^k par identification (on se ramène à des équations de Van der Monde en utilisant les relations pour $n \in \{0, 1, ..., p-1\}$).

Remarque : En particulier, on a $\boxed{\lim_{n \to +\infty} A^n = O \text{ ssi } \forall j \in \{1, ..., n\}, |\lambda_j| < 1}$.

Exemple : On reprend l'exemple du 8)c).
On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Donc :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ 2^n - (-1)^n & 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Variante : Les coefficients de A^n sont de la forme $\alpha 2^n + \beta(-1)^n$.
Pour chaque coefficient, on trouve α et β en utilisant les relations pour $n = 0$ et $n = 1$.

Exemple : Supposons $n = 2$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Alors $B^n = (\lambda I_2 + aJ)^n = \lambda^n I_2 + anJ = \begin{pmatrix} \lambda^n & na\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
Remarque : On peut appliquer la formule du binôme à $(\lambda I_2 + aJ)^n$, car I_2 et J commutent.

b) *Récurrences linéaires*

Exemple : Considérons les suites complexes vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Avec $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$, la relation s'écrit $X_{n+1} = AX_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$.
On a $\chi_A(x) = x^2 - ax - b$ (cf notion d'équation caractéristique).

- Si χ_A admet deux racines distinctes λ et μ, alors A^n est semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda^n, \mu^n)$.

Comme $X_n = A^n X_0$, alors u_n est de la forme $\alpha\lambda^n + \beta\mu^n$ (et réciproquement par dimension).

- Si χ_A admet une racine double λ, alors A^n est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

Donc u_n est de la forme $\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}$. Si $\lambda \neq 0$ (c'est-à-dire $(a,b) \neq (0,0)$), on écrit u_n sous la forme $(\alpha + \beta n)\lambda^n$.

Remarque : Dans les deux cas, on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = 0 \text{ pour tout } X_0 \text{ ssi toute valeur propre vérifie } |\lambda| < 1}$.

c) *Systèmes différentiels*

On considère $\boxed{(S) : X'(t) = AX(t)}$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose $\boxed{P^{-1}AP = B}$.

Avec le changement de variable $\boxed{X(t) = PY(t) = \sum_{j=1}^n y_j(t)P_j}$, le système (S) s'écrit : $Y'(t) = BY(t)$.

$\boxed{\text{Lorsque } B = \mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \text{ est diagonale, on est donc ramené aux } n \text{ équations différentielles } y_j'(t) = \lambda_j y_j(t)}$.

Donc les solutions sont les $X(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \exp(\lambda_j t)P_j$.

Remarque : En particulier, on a $\boxed{\lim_{t\to+\infty} X(t) = 0 \text{ pour toute valeur initiale } X(0) \text{ ssi } \forall j \in \{1, ..., n\},\ \mathrm{Re}\,\lambda_j < 0}$.

10) Compléments

a) *Densité de* $GL_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Prop : Toute matrice réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite de matrices inversibles (de $GL_n(\mathbb{R})$).

Preuve : Le spectre $\mathrm{Sp}\,A$ de A est fini : La matrice A admet un nombre fini de valeurs propres.

On peut donc trouver une suite réelle $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mu_k \notin \mathrm{Sp}\,A$.

Alors on a $A = \lim_{n\to+\infty}(A - \mu_k I_n)$, et $(A - \mu_k I_n) \in GL_n(K)$, car $\det(A - \mu_k I_n) \neq 0$.

Remarque : La propriété est aussi valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b) *Polynômes caractéristiques de AB et BA*

Prop : Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Les matrices AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Preuve (lorsque $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : Si A est inversible, AB est semblable à $BA = A(BA)A^{-1}$.

Dans le cas général, on écrit A comme limite d'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles.

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, les matrices A_kB et BA_k ont même polynôme caractéristique.

Et on utilise la continuité de $M \longmapsto \chi_M$. On obtient en effet $\chi_{AB} = \lim_{n\to+\infty} \chi_{A_kB} = \lim_{n\to+\infty} \chi_{BA_k} = \chi_{BA}$.

Remarque : En revanche, lorsque A et B ne sont pas inversibles, AB et BA ne sont pas toujours semblables.

Par exemple, pour $n \geq 2$, on peut trouver A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = O_n$ et $BA \neq O_n$.

c) *Matrices réelles semblables dans* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Prop : Deux matrices réelles semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve : Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe $P + iQ \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A(P + iQ) = (P + iQ)B$.

En prenant parties réelles et parties imaginaires, on obtient $A(P + tQ) = (P + tQ)B$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Il suffit de prouver l'existence de $t \in \mathbb{R}$ tel que $P + tQ \in GL_n(\mathbb{R})$.

Or, $t \longmapsto \det(P + tQ)$ est un polynôme en t, non nul car $\det(P + iQ) \neq 0$, donc ne peut s'annuler sur $\mathbb{R}$ entier.

d) *Diagonalisation à ε près* (complément culturel)

Prop : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice semblable à A dont les coefficients non diagonaux sont inférieurs à ε.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ pour tout $\varepsilon \neq 0$: on prend $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.