Familles libres et sommes directes de sous-espaces vectoriels

1) Combinaisons linéaires

a) *Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs*

Def : $\overrightarrow{x}$ est combinaison linéaire de $x_1, x_2, ..., x_n$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n$ tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Exemples : Dans $\mathbb{R}^3$, les combinaisons linéaires de $(1,0,0)$ et $(0,1,1)$ sont les (α, β, β), avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les applications $f : x \longmapsto A\cos(x+\varphi)$ sont les combinaisons linéaires de cos et de sin.

b) *Combinaisons linéaires d'une famille (finie ou infinie) de vecteurs*

Def : On dit qu'une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle ssi $J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est finie.

Remarque : L'ensemble $K^{(I)}$ des familles presque nulles à valeurs dans K est un sev du K-ev $\mathcal{F}(I, K) = K^I$.

Def : On dit que x est combinaison linéaire de $(x_i)_{i \in I}$ ssi il existe une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in K^I$ telle que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \text{(cette somme a un sens car elle ne contient qu'un nombre FINI de termes non nuls)}$$

Def équivalente : x est combinaison linéaire d'une sous-famille finie : $x = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$, avec $J \subset I$ et J finie.

c) *Cas particulier des familles indexées par $\mathbb{N}$*

x est combinaison linéaire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ssi il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^{n+1}$ tels que $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i x_i$.

Exemple : Dans $K[X]$, les combinaisons linéaires de $(X^{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sont les polynômes pairs.

2) Sous-espaces vectoriels, sev engendré par une famille de vecteurs, familles génératrices

a) *Sous-espaces vectoriels*

Def : F est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ ssi $F \subset E$, $0 \in F$ et $(*) \begin{cases} \forall (x,y) \in F^2, x+y \in F \\ \forall x \in F, \forall \lambda \in K, \lambda x \in F \end{cases}$

Def équivalente : On peut remplacer $(*)$ par $(x,y) \in F^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in K^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Prop : Un sev de E muni des lois induites est aussi un K-espace vectoriel.

Remarque : Un sev d'un sev de E est un sev de E.

Prop : Une intersection de sev de E est un sev de E.

b) *Sous-espace vectoriel engendré par une famille (finie ou infinie) de vecteurs*

Def : On pose $\boxed{\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n) = \{x \in E \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n,\ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\}}$.

Plus généralement, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de $(x_i)_{i \in I}$.

IMPORTANT : $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est le plus petit sev de E contenant les x_i, appelé sev engendré par $(x_i)_{i \in I}$.

Remarque : L'intersection de tous les sev de E contenant les x_i est un sev ; il s'agit donc de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Cas particuliers : $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$. Si $x \neq 0$, $\mathrm{Vect}(x) = Kx$ est la droite vectorielle engendrée par x.

c) *Familles génératrices*

Def : On dit que $\boxed{\text{la famille } \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} \text{ est génératrice dans } E \text{ ssi } \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I} = E}$.

Remarque : Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

3) Famille libres

a) *Familles libres (cas des familles finies)*

Def : $\boxed{(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ est libre ssi } \forall(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in K^n,\ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in \{1, 2, .., n\},\ \lambda_i = 0)}$.

Autrement dit, la seule combinaison linéaire qui donne le vecteur nul est la combinaison identiquement nulle.

Définition équivalente : La famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre ssi tout vecteur de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de $(x_1, x_2, ..., x_n)$, c'est-à-dire ssi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une base de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2, ..., x_n)$.

En effet, supposons $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$. Alors $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu_i) x_i = 0$, d'où $\forall i$, $\lambda_i - \mu_i = 0$.

b) *Familles libres (cas général)*

Def : On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est libre ssi $\forall(\lambda_i)_{i\in I} \in K^{(I)}$ presque nulle, $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow (\forall i \in I,\ \lambda_i = 0)$.

Autrement dit, $\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est libre ssi toute sous-famille finie } (x_i)_{i\in J} \text{ est libre}}$ (avec $J \subset I$ est finie).

Exemple : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall(\lambda_0, ..., \lambda_n) \in K^{n+1}$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow (\forall i,\ \lambda_i = 0)$.

c) Familles liées

Def : $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée ssi elle n'est pas libre.

Donc $\boxed{(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ est liée ssi il existe } (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0) \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0}$.

Remarque : Toute famille contenant le vecteur nul est liée. De même s'il existe une sous-famille liée.

Caractérisations : $\boxed{\text{Une famille } (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des autres}}$.

En effet, supposons $(x_1, x_2, ..., x_n)$ liée. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

Considérons p tel que $\lambda_p \neq 0$. Alors $x_p = \sum_{i\neq p} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_p} x_i$.

Réciproquement, si $x_p = \sum_{i\neq p} \mu_i x_i$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, avec $\lambda_p = -1$ et $\lambda_i = \mu_i$ pour tout $i \neq p$.

En fait, on a aussi une variante très utile en pratique :

IMPORTANT : $\boxed{\text{Une famille } (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des précédents}}$.

En effet, supposons $(x_1, x_2, ..., x_n)$ liée. Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \neq (0, 0, ..., 0)$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$.

Considérons $p = \max\{i \mid \lambda_i \neq 0\}$. On a $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$ et $\lambda_p \neq 0$, donc $x_p = \sum_{i=1}^{p-1} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_p} x_i$.

Remarque : De même, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée ssi un des vecteurs est combinaison linéaire des suivants.

Terminologie : On dit que deux vecteurs sont colinéaires ssi ils appartiennent à une même droite vectorielle.

Ainsi, $\boxed{x \text{ et } y \text{ sont colinéaires ssi } (x, y) \text{ est liée, donc ssi } x = 0 \text{ ou } \exists\lambda \in K,\ y = \lambda x}$.

Conséquence : $\boxed{(x_1, ..., x_n) \text{ est libre ssi } \forall i \in \{1, 2, ..., n\},\ x_i \notin \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{i-1})}$.

Exemple : (♣♣♣) Soient F_0, F_1, ... F_n des sev tels que $\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_n$.

Alors toute famille $(x_1, ..., x_n)$ vérifiant $x_i \in F_i \setminus F_{i-1}$ est libre (aucun vecteur n'est combinaison des précédents).

d) *Bases*

Def : Une base de E est une famille libre et génératrice dans E. Ainsi, $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E ssi tout vecteur $x \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $(e_i)_{i\in I}$.

L'unique famille (presque nulle) $(\lambda_i)_{i\in I}$ tel que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ est la famille des coordonnées de x dans $(e_i)_{i\in I}$.

4) Somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de sous-espaces vectoriels

a) *Somme de sous-espaces vectoriels*

Def et prop : $\boxed{F + G = \{x + y,\ (x, y) \in F \times G\}}$ est le plus petit sev contenant les sev F et G.

Exemple : $Kx + Ky = \mathrm{Vect}(x, y)$.

Remarque : La réunion de deux sev F et G n'est pas un sev (sauf si $F \subset G$ ou $G \subset F$).

Prop et def : Plus généralement, si F_1, F_2, ..., F_n sont des sev de E, on pose

$$F_1 + F_2 + ... + F_n = \{x_1 + ... + x_n\ ,\ (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times ... \times F_n\}$$

Alors $F_1 + ... + F_n$ est le plus petit sev contenant $F_1, ..., F_n$.

Remarque : $F + G + H = (F + G) + H$.

Plus généralement, la somme de sev est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de ces sev.

b) *Somme directe de sous-espaces vectoriels*

Def : On dit que $\boxed{\text{les sev } F_1, ..., F_n \text{ sont en somme directe}}$ ssi

$$\boxed{\forall (x_1, ..., x_n) \in F_1 \times ... \times F_n,\ x_1 + ... + x_n = 0 \Rightarrow (\forall i \in \{1, 2, .., n\},\ x_i = 0)}$$

Notation : Dans ce cas, on note $F_1 \oplus ... \oplus F_n$ la somme (directe) des sev F_i, et souvent par abus pour signifier que les sev sont en somme directe.

Exemple : Trois droites vectorielles sont en somme directe ssi elles ne sont pas coplanaires.

Ainsi, trois droites vectorielles distinctes d'un plan vectoriel ne sont pas en somme directe.

Prop : Supposons $F = F_1 \oplus ... \oplus F_n$.

Pour tout $x \in F$, il existe un unique $(x_1, ..., x_n) \in F_1 \times ... \times F_n$ tel que $x = x_1 + ... + x_n$.

Preuve : Si $x = x_1 + ... + x_n = y_1 + ... + y_n$, alors $(x_1 - y_1) + ... + (x_n - y_n) = 0$, donc les $x_i - y_i$ sont tous nuls.

c) *Caractérisation d'une somme directe de deux sev*

Prop (Important) : $\boxed{F \oplus G \text{ ssi } F \cap G = \{0\}}$.

Preuve : ($\Leftarrow$) Si $x+y=0\in F+G$, alors $x=-y\in F\cap G$, donc $x=y=0$. Preuve analogue pour ($\Rightarrow$).

IMPORTANT : Faux pour trois sev $F\oplus G\oplus H$: considérer trois droites vectorielles distinctes d'un plan.

Remarque : En revanche, on a $F\oplus G\oplus H$ ssi $F\oplus G$ et $(F+G)\oplus F_3$.

d) *Lien entre les notions de somme directe et de famille libre*

Prop : $F_1,...,F_n$ sont en somme directe ssi toute famille $(x_1,...,x_n)\in F_1\times F_2\times ...\times F_n$ de vecteurs non nuls est libre.

Remarque : En particulier, si $e_1,...,e_n$ sont des vecteurs non nuls, alors les droites vectorielles Ke_i sont en somme directe ssi $(e_1,...,e_n)$ est libre.

Remarque : Une famille est libre ssi aucun vecteur n'est combinaison linéaire des précédents.

De façon analogue, on a $F_1\oplus F_2...\oplus F_n$ ssi pour tout $p\in\{2,...,n\}$, $(F_1+...+F_{p-1})\oplus(F_p)$.

5) Sous-espaces supplémentaires, projections

a) *Sous-espaces supplémentaires*

Def : On dit que F et G sont supplémentaires dans E ssi $F\oplus G$ et $F+G=E$, c'est-à-dire ssi $F\oplus G=E$.

Def : Soit F sev de E. On dit que G est un supplémentaire de F ssi $F\oplus G=E$.

Attention : Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire : si F sev, $E\setminus F$ n'est jamais un sev.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) Les supplémentaires d'un hyperplan vectoriel H sont les droites D non incluses dans H.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit\clubsuit$) Notons $E=C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Considérons F et G les sev des fonctions respectivement paires et impaires. Alors $F\oplus G=E$.

On a $F\cap G=\{\widetilde{0}\}$ car la fonction nulle est la seule fonction à la fois paire et impaire.

D'autre part, on a $F+G=E$, car $f=g+h$, où $g(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))$ et $h(x)=\frac{1}{2}(f(x)-f(-x))$.

Ainsi, on a par exemple $e^x=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x$.

Remarque : De même, les sev de $M_n(K)$ des matrices symétriques et antisymétriques sont en somme directe.

Rappel : $M\in\mathcal{M}_n(K)$ est symétrique ssi ${}^tM=M$ et antisymétrique ssi ${}^tM=-M$.

Toute matrice M s'écrit $M=S+A$, avec $S=\frac{1}{2}(M+\,{}^tM)$ symétrique et $A=\frac{1}{2}(M-\,{}^tM)$ antisymétrique.

b) *Projections*

Prop (IMPORTANT) : Supposons $F\oplus G=E$.

Alors pour tout $x\in E$, il existe un unique $(x_1,x_2)\in F\times G$ tel que $x=x_1+x_2$.

L'application $p:E\to E\ x\longmapsto x_1$ est linéaire, appelée projection sur F parallèlement à G.

Exemple : ($\clubsuit\clubsuit$) Considérons le K-espace vectoriel $K[X]$ des polynômes sur K.

Soit B un polynôme non nul de degré n. L'ensemble $B.K[X]$ des multiples de B est un sev de $K[X]$.

On sait que tout polynôme s'écrit de façon unique sous la forme $A=BQ+R$, avec $\deg R<n$.

On a ainsi $K[X] = B.K[X] \oplus K_{n-1}[X]$.

L'application $p : K[X] \to K[X] \; A \longmapsto R = A \bmod B$ est la projection sur $K_{n-1}[X]$ parallèlement à $B.K[X]$.

6) Bases adaptées à une décomposition en somme directe

a) *Prop et def* : On suppose $E = F \oplus G$.

$\boxed{\text{Si } \mathcal{B}_1 \text{ est une base de } F \text{ et } \mathcal{B}_2 \text{ est une base de } G\text{, alors } \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ est une base de } E = F \oplus G}$.

On dit que $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

Preuve : On a $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1) + \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2) = F + G = E$, donc $\mathcal{B}$ est génératrice.

La famille $\mathcal{B}$ est libre : On considère une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ valant 0. On regroupe alors les termes et on obtient $x + y = 0$, avec $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1)$ et $y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2)$. Comme F et G sont en somme directe, on obtient $x = y = 0$.

Comme $\mathcal{B}_1$ est libre, les termes composant x sont nuls. Il en est de même de ceux de y car $\mathcal{B}_2$ est libre.

b) Plus généralement, une base de E adaptée à $E = F_1 \oplus F_2 \oplus ... \oplus F_n$ est une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_n$, où pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $\mathcal{B}_i$ est une base de F_i.

7) Caractérisations fondamentales en dimension finie (Très important)

a) *Rang d'une famille de vecteurs*

Rappel : $\mathrm{rg}(x_1, ..., x_p) = \dim \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_p)$.

$\boxed{\text{On a } \mathrm{rg}(x_1, ..., x_p) \leq p\text{, et } \mathrm{rg}(x_1, ..., x_p) = p \text{ ssi } (x_1, ..., x_p) \text{ est libre}}$.

b) *Caractérisation des bases en dimension finie*

Toute famille de cardinal $\geq n + 1$ dans un ev de dimension n est liée.

$\boxed{\text{Toute famille libre de cardinal } n \text{ dans un ev de dimension } n \text{ est une base}}$.

Remarque : Cette propriété résulte du théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base (de cardinal $n = \dim E$). Si la famille libre est déjà de cardinal n, aucun élément n'est ajouté.

Remarque : De façon analogue, toute famille génératrice de cardinal n est une base, mais cette propriété est moins utile en pratique, car il est en général plus aisé de prouver qu'une famille est libre que de prouver qu'elle est génératrice.

Exemple (♣♣♣) : Dans $K_n[X]$, toute famille $(P_0, ..., P_n)$ de polynômes échelonnés en degré (c'est-à-dire $\deg P_k = k$ pour tout $0 \leq k \leq n$) est une base de $K_n[X]$.

En effet, elle est libre, car par degré, aucun polynôme P_k n'est combinaison linéaire des précédents.

Or, elle est de cardinal $(n + 1)$, et comme $\dim K_n[X] = \mathrm{card}(1, X, ..., X^n) = n + 1$, elle est une base de $K_n[X]$.

Remarque : On peut aussi prouver la propriété en considérant la matrice de la famille $(P_0, ..., P_n)$ dans la base canonique de $K_n[X]$: on obtient une matrice triangulaire supérieure inversible (d'ordre $n + 1$), donc la famille est une base.

c) *Dimension d'un sev*

Si F est un sev de E de dimension n, alors $0 \leq \dim F \leq n$.

On a $\dim F = 0$ ssi $F = \{0\}$ et $\boxed{\dim F = n \text{ ssi } F = E}$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour prouver que deux sev } F \text{ et } G \text{ sont égaux, il suffit de prouver que } F \subset G \text{ et } \dim F = \dim G}$.

Exemple (♣) : Considérons l'opérateur de dérivation discrète $u : \mathbb{R}[X] \longmapsto \mathbb{R}[X]\ P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

On a $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg u(P) \leq (\deg P) - 1$, donc $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

Mais on vérifie aussi que $\operatorname{Ker} u = \mathbb{R}_0[X]$: toute fonction polynôme 1-périodique est contante.

On en déduit par le théorème du rang que $\dim u(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\operatorname{Ker} u) = (n+1) - 1 = n$.

Comme $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\dim u(\mathbb{R}_n[X]) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, alors $u(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d) *Caractérisation des supplémentaires*

Si $E = F + G$ et si $(F \cap G) = \{0\}$, alors $E = F \oplus G$.

Si $E = F + G$ et si $\dim F + \dim G = \dim E$, alors $E = F \oplus G$.

Remarque : Ces propriétés résultent de la relation de Grassmann $\dim(F+G) + \dim(F \cap G) = \dim F + \dim G$.

Exemple : (♣) Dans $\mathcal{M}_n(K)$, le sev $S_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est de dimension $\frac{1}{2}n(n+1)$, et le sev $A_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques est de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$. On a $\dim S_n(\mathbb{R}) + \dim A_n(\mathbb{R}) = n^2 = \dim \mathcal{M}_n(K)$.

On peut donc déduire $\mathcal{M}_n(K) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ de $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{O_n\}$.

Remarque : Une base de $S_n(\mathbb{R})$ est $(E_{ii})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{ij} + E_{ji})_{i<j}$.

Exemples de familles libres

1) Exemples de familles libres (= familles de vecteurs linéairement indépendants)

Exemple : (♣♣♣) Toute famille de polynômes de degrés échelonnés (strictement croissants) est libre.

En effet, aucun polynôme n'est combinaison linéaire des précédents.

Exemple : (♣) Les $f_k : \theta \longmapsto \cos(k\theta)$, avec $k \in \mathbb{N}$, sont linéairement indépendants dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En efet, supposons $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k = \widetilde{0}$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos(k\theta) = 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Or, on sait que $\cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$, où T_k est le polynôme de Tchebychev d'ordre k.

On en déduit que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_k(\cos\theta) = 0$, donc que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k T_k = 0$ dans $\mathbb{R}[X]$, car $[-1, 1]$ est infini.

Or, la famille de polynômes $(T_0, T_1, ..., T_n)$ est libre, car les T_k sont de degrés échelonnés. Donc $\forall k$, $\lambda_k = 0$.

Exemple : (♣♣♣) Soient $a_1, ..., a_n \in K$ distincts. On pose $L_j = \prod_{1 \leq i \leq n \text{ tel que } i \neq j} (X - a_i) \in K_{n-1}[X]$.

La famille $(L_1, ..., L_n)$ est une base de $K_{n-1}[X]$. En effet, par dimension, il suffit de prouver qu'elle est libre.

Or, L_j ne peut être combinaison linéaire des autres polynômes, car ils s'annulent en a_j alors que $L_j(a_j) = 1$.

Exemple : (♣) Les $f_a : x \longmapsto |x - a|$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont linéairement indépendants dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet, aucune fonction f_a n'est combinaison linéaire des autres (sinon, elle serait dérivable en a).

Exemple : (♣) Les $F_a : x \longmapsto \dfrac{1}{X - a}$, avec $a \in \mathbb{C}$, sont linéairement indépendants dans $\mathbb{C}(X)$.

En effet, aucune fraction F_a n'est combinaison linéaire des autres (sinon, elle n'admettrait pas a comme pôle).

Remarque : Cette propriété est liée à l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction.

Exemple : (♣) Dans le $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$. $(1, \sqrt{2}, \sqrt{6})$ est libre.

En effet, soient $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ tels que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{6} = 0$. Alors $(b\sqrt{2} + c\sqrt{6})^2 = a^2 \in \mathbb{Q}$, d'où on déduit en développant, que $bc\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Or, $\sqrt{3}$ est irrationnel, donc $bc = 0$. Vu que $\sqrt{2}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels, on montre $a = b = c = 0$.

Exemple : (♣♣♣) Dans un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire, $\boxed{\text{toute famille orthonormée est libre}}$.

En effet, soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormée, et supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.

En effectuant le produit scalaire avec e_j, on obtient $\lambda_j = (0 \mid e_j) = 0$. Donc tous les λ_j sont nuls.

Remarque : Plus généralement, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

2) Familles de vecteurs propres (IMPORTANT)

a) *Vecteur propre et sev propre d'un endomorphisme*

Def : On dit que x est vecteur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi $x \neq 0$ et il existe $\lambda \in K$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Le scalaire λ (qui est alors unique) est appelé valeur propre associée au vecteur propre x.

Def : Pour $\lambda \in K$, on définit $E_\lambda = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$, appelé sev propre de u associé à λ.

Exemple : Pour $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $u : y \longmapsto y'$, on a $E_\lambda = \mathbb{C}e_\lambda$, où $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ t \longmapsto e^{\lambda t}$.

b) *Propriété fondamentale* $\boxed{\text{Des vecteurs propres de valeurs propres distinctes sont linéairement indépendants}}$.

Autrement dit, des sev propres de u associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe :

Si $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ sont distincts, alors $E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus ... \oplus E_{\lambda_n}$.

Preuve : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, ..., x_n$ des vecteurs propres de valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ deux à deux distinctes.

Les vecteurs $x_1, ..., x_n$ ne sont pas nuls, et pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$.

Montrons par récurrence sur n que $(x_1, ..., x_n)$ est libre. La propriété est vraie pour $n = 1$, car $x_1 \neq 0$.

Supposons $n \geq 2$. Il s'agit de prouver que $(x_1, ..., x_n)$ est libre. Supposons donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$.

En composant par u, on obtient $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i = 0$.

Donc $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i - \lambda_n \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = 0$, et on obtient ainsi $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i = 0$.

Or, par hypothèse de récurrence, $(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ est libre. Donc $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) = 0$.

Comme $(\lambda_i - \lambda_n) \neq 0$ pour tout $i < n$, on obtient $\forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $\alpha_i = 0$.

D'où on obtient $\alpha_n x_n = 0$, et on conclut $\alpha_n = 0$ (car $x_n \neq 0$). D'où le résultat.

c) *Exemples*

Exemple : (♣♣♣) Les $e_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad t \longmapsto e^{\lambda t}$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$, sont linéairement indépendants.

En effet, ce sont des vecteurs propres de l'endomorphisme $u : y \longmapsto y'$ de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Exemple : (♣♣♣) Les $f_k : \theta \longmapsto \cos(k\theta)$, avec $k \in \mathbb{N}$, sont linéairement indépendants dans $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En effet, f_k est vecteur propre de $u : y \longmapsto y''$ de valeur propre $-k^2$, et les $-k^2$ sont deux à deux distincts.

3) Familles de formes linéaires

a) *Prop* : Soit $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ une famille de formes linéaires sur un K-ev E.

Supposons qu'il existe famille $(e_1, ..., e_n) \in E^n$ tels que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Alors $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est libre.

Preuve : Supposons qu'il existe une famille $(e_1, ..., e_n) \in E^n$ tels que $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$.

Soit $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in K^n$ tel que $\lambda_1 \varphi_1 + ... + \lambda_n \varphi_n = \widetilde{0}$, c'est-à-dire $\forall x \in E$, $\lambda_1 \varphi_1(x) + ... + \lambda_n \varphi_n(x) = 0$.

En prenant $x = e_j$, on obtient $\lambda_j = 0$ (car $\varphi_j(e_j) = 0$ et $\varphi_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$). Donc tous les λ_j sont nuls.

Remarque : En fait, la réciproque est vraie, mais est beaucoup plus difficile à prouver.

Remarque : Dans ce cas, l'application $\varphi : E \to K^n \ x \longmapsto (\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x))$ est surjective.

En effet, pour tout $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in K^n$, on a $(\varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)) = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, avec $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$.

b) *Exemple* : Dans $K[X]$, les formes linéaires $P \longmapsto P(a)$, avec $a \in K$, sont linéairement indépendantes.

En effet, considérons $a_1, ..., a_n \in K$ distincts, et $\varphi_k : K[X] \to K \quad P \longmapsto P(a_k)$.

En effet, supposons $\lambda_1 \varphi_1 + ... + \lambda_n \varphi_n = \widetilde{0}$.

Considérons les polynômes de Lagrange $L_j = \prod_{i \neq j} \left(\dfrac{X - a_i}{a_j - a_i} \right) \in K_{n-1}[X]$. Ainsi, $L_j(a_i) = \delta_{ij}$.

Comme $(\lambda_1 \varphi_1 + ... + \lambda_n \varphi_n)(L_j) = 0$, alors $\lambda_j = 0$. Donc $(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ est libre, d'où le résultat.

c) *Exemple* : Dans un espace E euclidien, pour toute base $(e_1, ..., e_n)$ de E, les formes linéaires $\varphi_k : x \longmapsto (x \mid e_k)$ forment une base de E^* (où $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, appelé espace dual de E, est l'ev des formes linéaires sur E).

En effet, comme $\dim E^* = n$, il suffit de prouver que les φ_k sont linéairement indépendants.

Supposons $\lambda_1 \varphi_1 + ... + \lambda_n \varphi_n = \widetilde{0}$, , c'est-à-dire $\forall x \in E$, $(x \mid \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n) = 0$.

En prenant $x = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$, on en déduit que $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ pour tout j.